PERCACCI

Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss. 1931

Erschienen im Akademie-Verlag, 108 Berlin, Leipziger Straße 3-4

Lizenznummer: 202 · 100/543/44/78
Gesamtherstellung: VEB Kongreß- und Werbedruck, 9273 Oberlungwitz
Reprinted in GDR

EINHEITLICHE THEORIE VON GRAVITATION UND ELEKTRIZITÄT

VON

A. EINSTEIN UND W. MAYER

Die allgemeine Relativitätstheorie war bisher in erster Linie eine rationelle Theorie der Gravitation und der metrischen Eigenschaften des Raumes. Bei der Behandlung der elektromagnetischen Erscheinungen aber mußte sie sich mit einer bloß äußerlichen Einverleibung der Maxwellschen Theorie in das relativistische Schema begnügen. Neben der quadratischen metrischen Form des Gravitationsfeldes mußte man eine von ihr logisch unabhängige Linearform einführen, deren Koeffizienten man als die Potentiale des elektromagnetischen Feldes deutete; in den Tensorgleichungen des Gravitationsfeldes stand neben dem Krümmungstensor — nur äußerlich und logisch willkürlich durch ein Plus-Zeichen mit ihm verknüpft — der kovariant geschriebene Maxwellsche Tensor des elektromagnetischen Feldes. Dies mußte um so schmerzlicher empfunden werden, als die Maxwellsche Theorie nur als Feldtheorie erster Näherung durch ein allerdings sehr reiches empirisches Material gestützt ist; der Verdacht war nicht von der Hand zu weisen, daß die Linearität der Maxwellschen Gleichungen nicht der Wirklichkeit entspreche, sondern daß die wahren Gleichungen des Elektromagnetismus für starke Felder von den Maxwellschen abweichen.

Deshalb waren die Theoretiker seit der Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie bemüht, eine logisch einheitliche Theorie des Gesamtfeldes aufzustellen. Man kann aber nicht behaupten, daß die bisher auf das Problem verwandten großen Anstrengungen zu einem befriedigenden Erfolg geführt hätten. Seit der Aufstellung der Quantenmechanik hat man im allgemeinen sich von diesen Bemühungen abgewandt, indem man vermutete, daß das Problem im Rahmen einer Feldtheorie im bisherigen Sinne des Wortes überhaupt unlösbar sei. Im Gegensatz zu dieser Meinung wollen wir hier eine Theorie geben, von der wir glauben, daß sie, abgesehen vom Quantenproblem, eine völlig befriedigende definitive Lösung bedeutet. Man gelangt zu den alten Formeln der Gravitation und Elektrizität auf einem neuen, durchaus einheitlichen Wege. Es erweist sich, daß Maxwells Gleichungen, wie sie gleich zu Anfang in die allgemeine Relativitätstheorie eingeführt wurden, in demselben Sinne als strenge Gleichungen anzusehen sind wie die Gravitationsgleichungen des leeren Raumes.

Die hier darzustellende Theorie knüpft psychologisch an die bekannte Theorie von Kaluza an, vermeidet es aber, das physikalische Kontinuum zu einem solchen von fünf Dimensionen zu erweitern. Kaluza beschreibt das Gesamtfeld in einem fünfdimensionalen Raume durch einen fünfdimensionalen

Maßtensor $g_{\mu\nu}$, wobei $g_{11} \cdots g_{44}$ physikalisch die Rolle des Gravitationspotentials spielen, während $g_{15} \cdots g_{45}$ als elektromagnetisches Potential gedeutet werden und die Bedeutung von g_{55} offengelassen ist. Das Kontinuum wird, um der erfahrungsgemäßen Vierdimensionalität des zeit-räumlichen Kontinuums gerecht zu werden, als »zylindrisch« bezüglich der Koordinate x^5 aufgefaßt $\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^5} = 0\right)$. Es gelingt Kaluza in ungezwungener Weise, Gleichungen zu erhalten, welche in erster Näherung mit den bekannten Gravitationsgleichungen bzw. den Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes übereinstimmen, indem er für den fünfdimensionalen Raum Gleichungen ansetzt, welche den Gleichungen des reinen Gravitationsfeldes der allgemeinen Relativitätstheorie völlig analog sind. Die Gleichungen der geodätischen Linie im fünfdimensionalen Raume sollen die Bewegungsgleichungen des elektrisch geladenen Massenpunktes darstellen.

Das Unbefriedigende der Kaluzaschen Theorie liegt zunächst in der Annahme eines fünfdimensionalen Kontinuums, da doch die Welt unserer Erfahrung dem Anscheine nach vierdimensional ist. Ferner ist vom Standpunkt einer relativistischen fünfdimensionalen Theorie die Zylindrizitätsbedingung eine formal wenig natürliche. Auch gelang es dieser Theorie nicht, der Konstanz des Verhältnisses von elektrischer und ponderabler Masse eines bewegten Massenpunktes gerecht zu werden. Endlich gelang — wie schon erwähnt — die physikalische Deutung der Komponente g_{55} des metrischen Tensors nicht.

All diese Schwierigkeiten werden bei der im folgenden dargelegten Theorie dadurch vermieden, daß man zwar bei dem vierdimensionalen Kontinuum bleibt, aber in diesem Vektoren mit fünf Komponenten und dementsprechend Tensoren einführt, deren Indizes von 1 bis 5 laufen. Wie dies möglich ist, wird im folgenden auseinandergesetzt. Ist diese formale Schwierigkeit überwunden, so ergibt sich die ganze Theorie auf einem Wege, der dem in der ursprünglichen allgemeinen Relativitätstheorie bei der Aufstellung des Gesetzes des reinen Gravitationsfeldes bzw. dem in der Kaluzaschen Theorie bei Aufstellung des allgemeinen Feldgesetzes eingeschlagenen Wege weitgehend analog ist.

§ 1. Vierervektoren und Fünfervektoren.

In jedem Punkte eines vierdimensionalen Riemannschen Raumes ist neben dem vierdimensionalen Vektorraume V_4, gebildet aus den kontravarianten und kovarianten Vektoren, noch ein fünfdimensionaler linearer Vektorraum V_5 gegeben. Die Komponenten eines kontravarianten Vektors dieses letzteren Raumes seien z. B. mit

$$a^\iota \quad (\iota = 1 \cdots 5)$$

bezeichnet. Griechische Indizes sollen Komponenten eines Fünfervektors, lateinische solche eines Vierervektors bezeichnen. Die Koordinaten des Riemannschen Raumes bezeichnen wir mit x_i $(i = 1 \cdots 4)$.

Fünfdimensionaler (linearer) Vektorraum bedeutet, daß jeder seiner (kontravarianten) Vektoren durch fünf Zahlen a^ι festgelegt ist, und daß im Bereiche

dieser a^ι erstens die Addition und zweitens die Multiplikation mit einer reinen Zahl (Skalar) in üblicher Weise definiert ist und nicht aus dem Bereich herausführt. Es sollen also $\alpha a^\iota + \beta b^\iota$ (α und β reine Zahlen) Komponenten eines Vektors im Vektorraum V_5 sein, wenn dies für a^ι und b^ι gilt. Der Vektor, dessen Komponenten alle null sind, heißt der Nullvektor.

Einer Koordinatentransformation des V_5 entsprechen Gleichungen von der Form

$$a^\iota = M^\iota_\tau \bar{a}^\tau, \tag{1}$$

wobei

$$|M^\iota_\tau| \neq 0. \tag{2}$$

Die M^ι_τ sind hierbei im allgemeinen Funktionen der x_i. Wegen der homogen linearen Gestalt dieser Transformationen ist die Operation der Summenbildung von Fünfervektoren oder die der Multiplikation mit einem Skalar unabhängig von der speziellen Wahl der Koordinaten.

Größen b_ι, die sich bei einer Transformation (1) so ändern, daß für jedes a^ι

$$b_\iota a^\iota \tag{3}$$

invariant ist, nennen wir die Komponenten eines kovarianten Fünfervektors. Auch für kovariante Vektoren sind die Operationen der Summenbildung und der Multiplikation mit einem Skalar sinnvoll.

Wie die Vektoren des V_4 mit dem Maßtensor des R_4

$$g_{ik} \text{ bzw. } g^{ik} \quad (g_i^{\,k} = \delta_i^{\,k})$$

gemessen werden, so gibt es auch für die Fünfervektoren a^ι, b_ι einen Maßtensor (nicht ausgearteter symmetrischer Tensor)

$$g_{\iota\kappa} \text{ bzw. } g^{\iota\kappa} \quad (g_\iota^{\,\kappa} = \delta_\iota^{\,\kappa}),$$

und wir wollen vom Fünfervektor a nun schlechtweg sprechen, der eine kontravariante Schreibweise (a^ι) und eine kovariante Schreibweise (a_ι) besitzt, wobei gilt

$$\left.\begin{aligned} a_\iota &= g_{\iota\kappa} a^\kappa \\ a^\iota &= g^{\iota\kappa} a_\kappa \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Zwischen den Fünfervektoren (a^ι) des V_5 und den Vierervektoren a^i des V_4 besteht bis jetzt keine Beziehung. Eine solche führen wir nun ein mittels des »gemischten« Tensors

$$\gamma_\iota^{\,k}, \tag{5}$$

der einem Vektor (a^ι) des V_5 einen Vektor (a^k) des V_4 und umgekehrt zuordnet:

$$a^k = \gamma_\iota^{\,k} a^\iota \tag{6}$$

$$b_\iota = \gamma_\iota^{\,k} b_k. \tag{7}$$

Vermittels der Maßtensoren des V_4 und V_5 können wir den Zuordnungstensor in den folgenden gleichwertigen Formen schreiben:

$$\gamma_\iota^{\ k},\ \gamma_{\iota k},\ \gamma^{\iota k},\ \gamma^\iota_{\ k}, \tag{8}$$

wo z. B.

$$\gamma^\iota_{\ k} = g^{\iota\sigma} g_{kl} \gamma_\sigma^{\ l}.$$

Wir wollen nun die in (6) und (7) festgelegte Zuordnung näher betrachten. Wir treffen die Festsetzung, daß der Rang der Matrix

$$\| \gamma_\iota^{\ k} \|$$

gleich vier ist. Durch $\gamma_\iota^{\ k} v_k$ (v_k beliebig) wird dann ein vierdimensionaler Vektorraum im V_5 gegeben, die »ausgezeichnete Ebene A«.

Die Relation

$$\gamma_\iota^{\ k} v_k = 0 \tag{9}$$

hat als einzige Lösung $v_k = 0$, wogegen

$$\gamma_\iota^{\ k} A^\iota = 0 \tag{10}$$

als einzige Lösung den bis auf einen Faktor bestimmten Normalvektor A^ι der ausgezeichneten Ebene A besitzt (denn $\gamma_\iota^{\ k} v_k A^\iota$ verschwindet wegen (10) für jedes v_k). A^ι wollen wir »die ausgezeichnete Richtung des V_5« nennen und durch die Festsetzung[1] normieren

$$g_{\iota\kappa} A^\iota A^\kappa = 1. \tag{11}$$

Der ausgezeichneten Richtung A^ι ist nach (10) und (6) im V_4 der Nullvektor zugeordnet, wogegen (7) jedem Vektor (b_k) des V_4 einen Vektor der ausgezeichneten Ebene des V_5 zuordnet.

Der Fünfertensor $(g_{\iota\kappa})$ bestimmt zusammen mit dem gemischten Tensor $(\gamma_\iota^{\ k})$ den Vierertensor $(g_{\iota\kappa}\gamma^\iota_{\ i}\gamma^\kappa_{\ k})$; von diesem wollen wir annehmen, daß er mit dem Maßtensor g_{ik} des V_4 identisch sei. Es bestehe also die Beziehung

$$g_{\iota\kappa} \gamma^\iota_{\ i} \gamma^\kappa_{\ k} = g_{ik}\ ^{2}. \tag{12}$$

[1] Diese Festsetzung bedeutet aber auch eine Annahme über den Charakter der Metrik des V_5.

[2] Wenn $g_{\iota\kappa}$ nicht ausgeartet ist und $\|\gamma^\iota_{\ p}\|$ den Rang vier hat, dann ist auch g_{pq} nicht ausgeartet.

Beweis: Wir zeigen, daß aus $g_{pq}\tau^p = 0 \cdots (\alpha)$, $\tau^p = 0$ folgt. Aus (α) folgt nämlich wegen (12)

$$0 = g_{\iota\kappa}\gamma^\kappa_{\ q}\sigma^\iota = \tau_\kappa \gamma^\kappa_{\ q},$$

wobei gesetzt ist

$$\sigma^\iota = \gamma^\iota_{\ p} \tau^p.$$

Daraus folgt, daß $\tau_\kappa = \varrho A_\kappa$, also auch $\tau^\iota = \varrho A^\iota$.

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für τ^ι folgt

$$\varrho A^\iota = \gamma^\iota_{\ p} \tau^p,$$

woraus durch Multiplikation mit A_ι wegen (10) $\varrho = 0$, und weiter das Verschwinden von τ^p nach (9) folgt.

Mit (12) gleichwertig sind die Relationen

$$\gamma_{\kappa p} \gamma^\kappa_{\ q} = g_{pq} \tag{12a}$$

$$\gamma_\kappa^{\ p} \gamma^\kappa_{\ q} = \delta^p_{\ q} \tag{12b}$$

$$g^{\iota\kappa} \gamma_\iota^{\ p} \gamma_\kappa^{\ q} = g^{pq} \tag{12c}$$

usw.

Wir berechnen noch die Größe

$$\gamma_\kappa^{\ p} \gamma^\iota_{\ p} = \Sigma_\kappa^{\ \iota}. \tag{13}$$

Durch Multiplikation mit $\gamma^\kappa_{\ q}$ ergibt sich wegen (12b)

$$\gamma^\iota_{\ q} = \gamma^\kappa_{\ q} \Sigma_\kappa^{\ \iota} \text{ oder}$$

$$\gamma^\kappa_{\ q}(\delta^\iota_{\ \kappa} - \Sigma_\kappa^{\ \iota}) = 0.$$

Folglich gilt

$$\delta^\iota_{\ \kappa} - \Sigma_\kappa^{\ \iota} = \rho^\iota A_\kappa. \tag{14}$$

Aus (13) folgt ferner durch Multiplikation mit A^κ

$$\Sigma_\kappa^{\ \iota} A^\kappa = 0.$$

Deshalb ergibt (14) durch Multiplikation mit A^κ

$$A^\iota = \rho^\iota,$$

wodurch (14) übergeht in

$$\Sigma_\kappa^{\ \iota} = \delta^\iota_{\ \kappa} - A^\iota A_\kappa.$$

Folglich nimmt (13) die Form an

$$\gamma_\kappa^{\ p} \gamma^\iota_{\ p} = \delta_\kappa^{\ \iota} - A_\kappa A^\iota \tag{13a}$$

oder durch Herunterziehen des Index ι

$$g_{pq} \gamma_\kappa^{\ p} \gamma_\iota^{\ q} + A_\kappa A_\iota = g_{\kappa\iota}. \tag{13b}$$

In den Gleichungen (12) und (13b) haben wir die Beziehungen gewonnen, welche die Metriken im V_4 und V_5 miteinander verknüpfen.

Die durch (7) hergestellte Verbindung zwischen den Vektoren (b_k) des V_4 und den Vektoren b_ι des V_5 ist ein-eindeutig. Multipliziert man nämlich (7) mit $\gamma^\iota_{\ r}$, so erhält man wegen (12b)

$$b_r = \gamma^\iota_{\ r} b_\iota, \tag{14}$$

also den ganz bestimmten Vektor b_r des V_4.

Wenn wir dagegen (6) mit $\gamma^\sigma_{\ k}$ multiplizieren, erhalten wir nach (13a)

$$\gamma^\sigma_{\ k} a^k = (\delta_\iota^{\ \sigma} - A_\iota A^\sigma) a^\iota = a^\sigma - \rho A^\sigma, \quad (\rho = A_\iota a^\iota),$$

also

$$a^\sigma = \gamma^\sigma_{\ k} a^k + \rho A^\sigma.$$

Der Fünfervektor (a^σ) ist also durch den Vierervektor (a^k) nur bis auf einen (A^σ) proportionalen Zusatz bestimmt.

Tensoren beliebiger Stufe lassen sich in bezug auf den V_5 ganz analog definieren wie in bezug auf den V_4, nur bezieht sich deren Kovarianz auf Transformationen vom Typus (1). Ebenso lassen sich gemischte Tensoren bilden, welche durch lateinische und griechische Indizes charakterisiert sind. Der Beziehungstensor γ^ι_k ist ein Beispiel hierfür. Bezüglich der Bildung von Tensoren aus Tensoren durch Addition, Multiplikation und »Verjüngung« (Kontraktion) ist eine explizite Darlegung nicht erforderlich; die letztere Operation kann sich natürlich nur auf zwei Indizes gleicher Art (zwei griechische bzw. zwei lateinische) beziehen.

§ 2. Absoluter Differentialkalkul.

Absolutes Differential und absolute Ableitung eines Fünfervektors. Die Transformation (1)

$$a^\iota = M^\iota_\tau \bar{a}^\tau$$

ist für $da^\iota (= a^\iota(x^j + dx^j) - a^\iota(x^j))$ an Stelle von a^ι nicht mehr gültig, da die M^ι_τ im allgemeinen Funktionen der x^j sind. Wir führen nun unter Verwendung von Drei-Index-Größen $\Gamma^\iota_{\varkappa q}$ (ι und $\varkappa$ von 1 bis 5, q von 1 bis 4) das absolute Differential ein

$$\mathfrak{d}a^\iota = da^\iota + \Gamma^\iota_{\varkappa q} a^\varkappa dx^q, \qquad (15)$$

wobei sein soll

$$\mathfrak{d}a^\iota = M^\iota_\tau \mathfrak{d}\bar{a}^\tau$$

$$d\bar{a}^\tau = d\bar{a}^\tau + \Gamma^\tau_{\varkappa q} \bar{a}^\varkappa dx^q.$$

Hieraus ergibt sich für die Γ das Transformationsgesetz

$$M^\varkappa_\sigma \Gamma^\iota_{\varkappa q} = M^\iota_\tau \Gamma^\tau_{\sigma q} - M^\iota_{\sigma,q}. \left(M^\iota_{\sigma,q} = \frac{\partial}{\partial x^q} M^\iota_\sigma \right). \qquad (16)$$

Ebenso definieren wir das absolute Differential des kovarianten Vektors

$$\mathfrak{d}b_\iota = db_\iota - \Gamma^\varkappa_{\iota q} b_\varkappa, \qquad (17)$$

wobei diese Definition so gewählt ist, daß

$$d(b_\iota a^\iota) = \mathfrak{d}b_\iota a^\iota + a^\iota \mathfrak{d}b_\iota. \qquad (18)$$

In üblicher Art wird dann das absolute Differential eines Fünfertensors von beliebiger Stufe gebildet. Das absolute Differential eines Fünfertensors ist ein Fünfertensor der gleichen Art.

Wir bezeichnen jetzt den Koeffizienten von dx^q in $\mathfrak{d}a^\iota$ mit $a^\iota_{;q}$, so daß gilt

$$a^\iota_{;q} = a^\iota_{,q} + \Gamma^\iota_{\varkappa q} a^\varkappa; \qquad (15a)$$

$a^\iota_{;q}$ verhält sich bei Koordinatentransformationen (der x^j) wie ein kovarianter Vierervektor. $a^\iota_{;q}$ ist demnach ein gemischter Tensor, wie z. B. γ^ι_q. Durch Differentiation entstehen also aus Fünfertensoren gemischte Tensoren.

Absolute Differentiation des Vierervektors. Ist (τ^i) ein Vektor im V_4, so definieren wir die absolute Ableitung wie in der Riemann-Geometrie durch die Gleichung

$$\tau^i_{;q} = \tau^i_{,q} + \begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} \tau^p. \qquad (19)$$

wobei $\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix}$ die mit dem Maßtensor g_{ik} des V_4 gebildeten Christoffel-Symbole sind. Genau so sei $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot;q}$ gleich der entsprechenden Ricci-Ableitung, sobald $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ nur lateinische Indizes besitzt.

Ist dagegen $S^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ ein gemischter Tensor, so definieren wir

$$S^{\cdot\cdot}_{\cdot;q} = S^{\cdot\cdot}_{\cdot,q} + \textstyle\sum(\cdot). \qquad (20)$$

wo die Summe genau so viele Summanden hat wie der Tensor Indizes, und zwar entspricht

einem	griechischen	Index	$S^{\cdot\cdot\tau}_{\cdot\cdot}$	der	Summand	$+\Gamma^\tau_{\alpha q} S^{\cdot\cdot\alpha}_{\cdot\cdot}$
»	»	»	$S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\varkappa}$	»	»	$-\Gamma^\alpha_{\varkappa q} S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\alpha}$
»	lateinischen	»	$S^{\cdot\cdot i}_{\cdot\cdot}$	»	»	$+\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} S^{\cdot\cdot p}_{\cdot\cdot}$
»	»	»	$S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot p}$	»	»	$-\begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix} S^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot r}$.

Diese zuerst in einem formal analogen Falle von Waerden und Bartolotti eingeführte Erweiterung des absoluten Differentialkalkuls ist so gewählt, daß die Rechenregeln gelten:

$$\left.\begin{aligned} (A^{\cdot\cdot}_{\cdot} B^{\cdot})_{;q} &= A^{\cdot\cdot}_{\cdot;q} B^{\cdot} + B^{\cdot}_{;q} A^{\cdot}_{\cdot\cdot} \\ (A^{\cdot\cdot}_{\cdot} + B^{\cdot\cdot}_{\cdot})_{;q} &= A^{\cdot\cdot}_{\cdot;q} + B^{\cdot\cdot}_{\cdot;q} \\ \rho_{;q} &= \rho_{,q} \quad (\rho = \text{Skalar}). \end{aligned}\right| \qquad (21)$$

Natürlich gilt auch hier wie im gewöhnlichen Ricci-Kalkul

$$0 = g_{ik;q} = g^{ik}_{;q} = \delta^k_{i;q}. \qquad (22)$$

Genügt ein längs eines Kurvenstückes im Raume der x^j definierter Fünfervektor a^ι der Bedingung

$$\mathfrak{d}a^\iota = 0 = da^\iota + \Gamma^\iota_{\varkappa q} a^\varkappa dx^q,$$

so wollen wir ihn einen längs des Kurvenstückes parallel verschobenen Vektor nennen. Der Fünfervektor ändert sich dann längs der Kurve gemäß der Gleichung:

$$da^\iota = -\Gamma^\iota_{\varkappa q} a^\varkappa dx^q. \qquad (23)$$

Ferner definiert die Gleichung

$$da^i = -\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} a^p dx^q \qquad (24)$$

die Parallelverschiebung eines Vierervektors (a^i) längs einer Kurve.

§ 3. Bestimmung der Drei-Indizes-Symbole $\Gamma^{\iota}_{\varkappa q}$.

Eine Mannigfaltigkeit der hier ins Auge gefaßten Art ist zunächst als gegeben zu betrachten, wenn die Tensoren $(g_{\iota\varkappa})$ und $(\gamma_\iota{}^k)$ gegeben sind, durch welche Tensoren der vierdimensionale Maßtensor g_{pq} gemäß (12c) mitbestimmt ist. Bei gegebenem Gaussschen Koordinatensystem sind aber die Tensoren $(g_{\iota\varkappa})$ und $(\gamma_\iota{}^k)$ noch insoweit willkürlich, als die Koordinatenwahl im V_5 noch willkürlich getroffen werden kann. Von den 15 + 20 Komponenten dieser Tensoren sind deshalb gemäß (1) noch 25 wählbar, so daß bei gegebenem Gaussschem Koordinatensystem wie im Falle der alten Gravitationstheorie nur 10 zur eigentlichen Charakterisierung der Mannigfaltigkeit übrigbleiben. Letztere ist jedoch erst dann als völlig charakterisiert zu betrachten, wenn die Größen $\Gamma^{\iota}_{\varkappa q}$ festgelegt sind, was nun geschehen soll. Hierfür treffen wir drei Bestimmungen.

Ist (a^ι) bzw. (a_ι) ein Fünfervektor, so besteht die Relation

$$a_\iota = g_{\iota\varkappa} a^\varkappa .$$

Bilden wir die absoluten Differentiale, so erhalten wir

$$\mathfrak{d}a_\iota = g_{\iota\varkappa}\mathfrak{d}a^\varkappa + a^\varkappa \mathfrak{d}g_{\iota\varkappa} .$$

Aus $\mathfrak{d}a_\iota = 0$ folgt also nur dann $\mathfrak{d}a^\varkappa = 0$ (und umgekehrt), wenn die Festsetzung getroffen wird, daß $\mathfrak{d}g_{\iota\varkappa}$ verschwindet, oder daß

$$g_{\iota\varkappa;q} = 0 . \tag{I}$$

Nur vermöge dieser Festsetzung I erlangt die Aussage, daß das absolute Differential eines Fünfervektors (in einer bestimmten Richtung) verschwinde, einen bestimmten Sinn. Diese Festsetzung kann auch durch die gleichwertige ersetzt werden, daß bei einer Parallelverschiebung zweier Fünfervektoren (a^ι) und (b^ι) die Form

$$g_{\iota\varkappa} a^\iota b^\varkappa$$

ungeändert bleibt. Die Festsetzung (I) liefert 60 Gleichungen für die 100 Größen $\Gamma^{\iota}_{\varkappa q}$. —

Zwischen einem Vektor (a^ι) der ausgezeichneten Ebene und dem ihm im V_4 zugeordneten Vektor (a^k) besteht die ein-eindeutige Beziehung

$$a^\iota = \gamma^\iota{}_k a^k .$$

Wenn (a^k) längs eines Kurvenstückes C des vierdimensionalen Raumes irgendwie (nicht parallel) verschoben wird, so wird gemäß dieser Gleichung der Vektor a^ι der ausgezeichneten Ebene A in ganz bestimmter Weise mitverschoben, wobei die Gleichung gilt

$$\mathfrak{d}a^\iota = \gamma^\iota{}_k \mathfrak{d}a^k + a^k \mathfrak{d}\gamma^\iota{}_k . \tag{25}$$

Unsere zweite Festsetzung ist nun folgende: Bei Parallelverschiebung von (a^k) (d. h. $\mathfrak{d}a^k = 0$) soll das absolute Differential des mitverschobenen Vektors in die ausgezeichnete Richtung A^ι fallen. Dies

0(5)

bedeutet, daß in (25) für $\mathfrak{d}a^k = 0$ die $\mathfrak{d}a^\iota$ den A^ι proportional sein sollen, oder daß (bei beliebigem a^k, dx_q)

$$a^k dx^q \gamma^\iota{}_{k;q}$$

proportional A^ι sein soll. Es muß also sein

$$\gamma^\iota{}_{k;q} = A^\iota F_{kq} , \tag{II}$$

wobei F_{kq} ein Vierertensor zweiter Stufe ist.

Unsere dritte Festsetzung ist eine Spezialisierung der zweiten: Erfolgt die Parallelverschiebung des Vektors (a^k) in seiner eigenen Richtung $(dx^q = \rho a^q)$, so soll auch der ihm in der ausgezeichneten Ebene zugeordnete Vektor (a^ι) eine Parallelverschiebung erfahren $(\mathfrak{d}a^\iota = 0)$. Dies liefert die Bedingung

$$0 = \gamma^\iota{}_{k;q} a^k a^q = A^\iota F_{kq} a^k a^q$$

oder, da a^k ein beliebiger Vierervektor ist,

$$F_{kq} = -F_{qk} . \tag{III}$$

Die Vereinbarkeit der Bedingungen I, II, III wird später bewiesen.

Multipliziert man (II) mit A_ι, so ergibt sich wegen (11) und (10)

$$F_{kq} = A_\iota \gamma^\iota{}_{k;q} = -\gamma^\iota{}_k A_{\iota;q} . \tag{26}$$

Multiplikation mit $\gamma_\sigma{}^k$ ergibt weiter wegen (13a)

$$\gamma_\sigma{}^k F_{kq} = -(\delta_\sigma{}^\iota - A_\sigma A^\iota) A_{\iota;q} = -A_{\sigma;q} + A_\sigma A^\iota A_{\iota;q}$$

oder wegen des Verschwindens von $A^\iota A_{\iota;q} (= \frac{1}{2}(A^\iota A_\iota)_{;q})$

$$A_{\sigma;q} = \gamma_\sigma{}^k F_{qk} . \tag{27}$$

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist folgendes. Unterwirft man die Γ den durch ihre Einfachheit naheliegenden Bedingungen I, II, III, so sind sie dadurch bei gegebenen $g_{\iota\varkappa}$ und $\gamma_\iota{}^k$ noch nicht vollständig, sondern nur bis auf den antisymmetrischen Tensor F_{kq} bestimmt, der noch frei wählbar bleibt. Es wird sich zeigen, daß dieser zusammen mit dem Riemannschen Maßtensor g_{ik} die Eigenschaften der betrachteten Mannigfaltigkeit völlig bestimmt.

Es ist instruktiv, das hier behandelte Problem in Beziehung zu bringen mit dem eines Riemann-Raumes R_m, welcher in einen Riemann-Raum R_n von höherer Dimension eingebettet ist. Denn auch bei diesem Problem existieren in einem Punkte von R_m zwei Metriken, von denen eine zu R_m, die andere zu R_n gehört. R_m entspricht dem vierdimensionalen Raume, während in unserem Falle statt R_n nur der jedem Punkte von R_m zugeordnete Vektorraum von $n (= 5)$ Dimensionen vorhanden ist.

$x^\iota = x^\iota(y^1 \cdots y^m)$ $(\iota = 1 \cdots n)$ ist die analytische Darstellung des Unterraumes. Einem Punkte von R_m kommt die Metrik $g_{pq} dy^p dy^q$ im R_m und die Metrik $g_{\iota\varkappa} dx^\iota dx^\varkappa$ im R_n zu. $\frac{\partial x^\iota}{\partial y^p} = \gamma^\iota{}_p$ ist hier der Zuordnungstensor. A^ι, definiert durch $\frac{\partial x^\iota}{\partial y^p} A_\iota = 0$, ist die Normale des R_m im betrachteten Punkte.

Auch in diesem Falle gelten die Relationen I und II. F_{kq} ist aber bei diesem Problem symmetrisch und ist im Falle $n = m + 1$ als »die zweite Grundform« bekannt. Es ist also ausschließlich die Festsetzung III, welche die von uns betrachtete Raumstruktur gegenüber dem Problem der eingebetteten Mannigfaltigkeit unterscheidet. Hier liegt also auch das unterscheidende Moment der von uns entwickelten Theorie gegenüber derjenigen von KALUZA.

§ 4. In bezug auf den V_5 geradeste Linien.

Wenn wir einen Vektor (a^ι) des V_5 in der ihm im V_4 zugeordneten Richtung $a^k = \gamma_\iota^k a^\iota$ parallel verschieben, so wird dadurch im Koordinatenraum eine Kurve bestimmt, deren Gleichung wir jetzt aufstellen wollen.

Bei geeigneter Wahl eines Parameters t können wir $a^k = \gamma_\iota^k a^\iota = \frac{dx^k}{dt}$ setzen. Aus

$$a^k = \gamma_\iota^k a^\iota$$

folgt dann durch Differenzieren wegen $\mathfrak{d} a^\iota = 0$

$$\mathfrak{d} a^k = \gamma^k_{\iota,r} a^\iota a^r dt$$

oder wegen II

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = A_\iota a^\iota F^k{}_r \frac{dx^r}{dt}. \tag{28}$$

Nun ist aber

$$\frac{\mathfrak{d}(A_\iota a^\iota)}{\mathfrak{d}t} = A_{\iota;p} a^p a^\iota + A_\iota \frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}t},$$

wobei das zweite Glied der rechten Seite wegen $\mathfrak{d} a^\iota = 0$ verschwindet. Aber auch das erste Glied der rechten Seite verschwindet; denn es ist wegen (27)

$$A_{\iota;p} a^p a^\iota = \gamma_\iota^k F_{pk} a^p a^\iota = F_{pk} a^p a^k = 0.$$

Es ist also $A_\iota a^\iota = \varepsilon$ auf der Kurve konstant, so daß (28) in der Form zu schreiben ist

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \varepsilon F^k{}_r \frac{dx^r}{dt}, \quad (\varepsilon = \text{konst}). \tag{28a}$$

Was den Parameter t anlangt, so ist längs der Kurve $\mathfrak{d}(g_{\iota\kappa} a^\iota a^\kappa) = 0$, also $g_{\iota\kappa} a^\iota a^\kappa =$ konst, oder wegen (13b)

$$g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} + \varepsilon^2 = \text{konst}$$

oder

$$g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \text{konst}.$$

Wir können daher bei Beschränkung auf zeitartige Kurven in (28a) die durch

$$ds^2 = -g_{pq} dx^p dx^q$$

definierte Bogenlänge als Parameter einführen, wodurch auch die in (28a) eintretende Konstante ε fixiert ist.

Gleichung (28a) entspricht genau der relativistischen Bewegungsgleichung des elektrisch geladenen Massenpunktes, nicht nur angenähert wie in KALUZAS Theorie. Insbesondere ist bemerkenswert, daß hierbei das Verhältnis ε der elektrischen zur ponderablen Masse als streng konstant herauskommt.

§ 5. Die Krümmung bezüglich des V_5.

Die Integrabilitätsbedingung bezüglich der Parallelverschiebung

$$\mathfrak{d} a^\sigma = 0$$

bzw.

$$da^\sigma = -\Gamma^\sigma_{\iota p} a^\iota dx^p$$

lauten

$$P^\sigma{}_{\iota qp} a^\iota = 0, \tag{29}$$

wobei

$$P^\sigma{}_{\iota qp} = -\Gamma^\sigma_{\iota q,p} + \Gamma^\sigma_{\iota p,q} + \Gamma^\sigma_{\tau q} \Gamma^\tau_{\iota p} - \Gamma^\sigma_{\tau p} \Gamma^\tau_{\iota q}. \tag{30}$$

Aus (29) folgt, daß das Verschwinden von (30) invarianten Charakter hat. Der Beweis, daß $P^\sigma{}_{\iota qp}$ ein gemischter Tensor von der durch die Indizes ausgedrückten Art ist, läßt sich wie folgt erbringen. Wir betrachten die zweidimensionale Mannigfaltigkeit $x^q = x^q(u, v)$, welche in einem ihrer Punkte die zwei Richtungen $\frac{\partial x^j}{\partial u}$, $\frac{\partial x^j}{\partial v}$ definiert. Ist in dem betrachteten Punkte und Umgebung der Fünfervektor a^ι gegeben, so bilden wir

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u}\left(\frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}v}\right).$$

Es ist

$$\frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}u} = \frac{\partial a^\iota}{\partial u} + \Gamma^\iota_{\kappa q} a^\kappa \frac{\partial x^q}{\partial u}$$

und weiter

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) = \left(\frac{\partial a^\iota}{\partial u} + \Gamma^\iota_{\kappa q} a^\kappa \frac{\partial x^q}{\partial u}\right)_{,v} + \Gamma^\iota_{\sigma p}\left(\frac{\partial a^\sigma}{\partial u} + \Gamma^\sigma_{\kappa q} a^\kappa \frac{\partial x^q}{\partial u}\right) \frac{\partial x^p}{\partial v}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}v}\left(\frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}u}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}u}\left(\frac{\mathfrak{d} a^\iota}{\mathfrak{d}v}\right) = P^\iota{}_{\kappa pq} a^\kappa \frac{\partial x^p}{\partial v} \frac{\partial x^q}{\partial u}, \tag{31}$$

woraus der Tensorcharakter von $P^\iota{}_{\kappa pq}$ hervorgeht.

Natürlich existiert im Rahmen der von uns untersuchten Raumstruktur auch die aus dem g_{ik} gebildete gewöhnliche RIEMANN-Krümmung ebenso wie auch die aus den g_{ik} gebildete geodätische Linie. Die neu gewonnene Erkenntnis besteht aber gerade darin, daß die für die physikalischen Gesetze maßgebenden Bildungen diejenigen sind, welche aus der durch die Γ bestimmten Parallelverschiebung von Fünfervektoren gewonnen werden.

Andererseits ist es klar, daß die so gewonnenen mathematischen Gebilde nur in ihrer Beziehung zum vierdimensionalen Raume bzw. zum Tangentialraume V_4 in die physikalischen Gesetze eingehen können. Damit hängt es zusammen, daß sich die für letztere maßgebenden Ausdrücke schließlich durch die Vierertensoren g_{ik} und F_{ik} allein ausdrücken lassen, während in diesen Ausdrücken γ^{ι}_{k} und $g_{\iota\varepsilon}$ nicht mehr explizite vorkommen (vgl. z. B. Gleichung (28a)); dies wird im nächsten Paragraphen näher auseinandergesetzt.

Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, die Beziehung aufzusuchen, welche zwischen der Fünferkrümmung (30) und der (Riemannschen) Viererkrümmung besteht. Wir gehen aus von den Gleichungen (II) und (27)[1]:

$$\gamma_{\iota k;q} = A_\iota F_{kq} \tag{II}$$

$$A_{\iota;p} = \gamma_{\iota k} F_p{}^k \tag{27}$$

Durch nochmalige absolute Differentiation erhält man

$$\gamma_{\iota k;q;p} = F_{kq;p} A_\iota + F_{kq} F_p{}^r \gamma_{\iota r} \tag{IIa}$$

$$A_{\iota;p;q} = F_{kq} F_p{}^k A_\iota + \gamma_{\iota k} F_p{}^k{}_{;q} \tag{27a}$$

und hieraus

$$\gamma_{\iota k;q;p} - \gamma_{\iota k;p;q} = A_\iota (F_{kq;p} - F_{kp;q}) + \gamma_{\iota r}(F_{kq} F_p{}^r - F_{kp} F_q{}^r) \tag{IIb}$$

$$A_{\iota;p;q} - A_{\iota;q;p} = \gamma_{\iota k}(F_p{}^k{}_{;q} - F_q{}^k{}_{;p}). \tag{27b}$$

Durch explizites Ausrechnen der linken Seiten dieser Gleichungen erhält man nach einiger Rechnung

$$\gamma_{\iota k;q;p} - \gamma_{\iota k;p;q} = P^\sigma{}_{\iota qp} \gamma_{\sigma k} - R^r{}_{kpq} \gamma_{\iota r} \tag{32}$$

$$A_{\iota;p;q} - A_{\iota;q;p} = P^\sigma{}_{\iota pq} A_\sigma, \tag{33}$$

wobei R die Riemannsche Viererkrümmung bedeutet:

$$R^r{}_{kqp} = -\begin{Bmatrix} r \\ kq \end{Bmatrix}_{,p} + \begin{Bmatrix} r \\ kp \end{Bmatrix}_{,q} + \begin{Bmatrix} r \\ tq \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t \\ kp \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r \\ tp \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t \\ kq \end{Bmatrix}. \tag{34}$$

Aus (IIb), (27b), (32) und (33) erhält man die gesuchten Relationen:

$$P^\sigma{}_{\iota qp} \gamma_{\sigma k} = A_\iota (F_{kq;p} - F_{kp;q}) + \gamma_{\iota r}\{R^r{}_{kpq} + F_{kq} F_p{}^r - F_{kp} F_q{}^r\} \tag{35}$$

$$P^\sigma{}_{\iota qp} A_\sigma = \gamma_{\iota r}(F_q{}^r{}_{;p} - F_p{}^r{}_{;q}). \tag{36}$$

[1] Aus den Gleichungen II und (27) sind die Γ eindeutig berechenbar. Ist $F_{pq} + F_{qp} = 0$, so sind, wie man leicht sieht, die Festsetzungen I und III erfüllt, womit ihre Vereinbarkeit gezeigt ist. Es ist ja nur das Gelten von I nachzuweisen, was bei Anwendung von (13b) leicht gelingt.

Multiplikation von (35) mit $\gamma^{\tau k}$ ergibt wegen $\gamma_{\sigma k}\gamma^{\tau k} = \gamma_\sigma{}^k \gamma^\tau{}_k = \delta_\sigma{}^\tau - A_\sigma A^\tau$ und (36)

$$P^\tau{}_{\iota qp} = -\gamma_{\iota r} A^\tau (F_p{}^r{}_{;q} - F_q{}^r{}_{;p}) + \gamma^{\tau k} A_\iota (F_{kq;p} - F_{kp;q})$$
$$+ \gamma_{\iota r} \gamma^{\tau k}(R^r{}_{kpq} + F_{kq} F_p{}^r - F_{kp} F_q{}^r). \tag{37}$$

Es sei noch bemerkt, daß auch für den Fünferkrümmungstensor die (Bianchische) Identität gilt.

$$P^\tau{}_{\iota pq;r} + P^\tau{}_{\iota qr;p} + P^\tau{}_{\iota rpq} \equiv 0. \tag{38}$$

Man beweist sie am einfachsten, indem man im betrachteten Punkte durch Koordinatentransformation (der x^i) die $\begin{Bmatrix} r \\ pq \end{Bmatrix}$ und durch Transformation (1) der Fünferkoordinaten die $\Gamma^\tau_{\varepsilon q}$ zum Verschwinden bringt, was gemäß (16) möglich ist.

Wir bilden ferner aus (37) durch Verjüngung

$$P_{\iota p} = \gamma^q_\tau P^\tau{}_{\iota qp} = A_\iota F_p{}^k{}_{;k} + \gamma_{\iota r}(R^r_p - F_{kp} F^{kr}) \tag{39}$$

$$P = \gamma^{\iota p} P_{\iota p} = R - F_{kp} F^{kp} \tag{40}$$

und

$$U_{\iota p} = P_{\iota p} - \tfrac{1}{4}\gamma_{\iota p}(P+R) = A_\iota F_p{}^k{}_{;k} + \gamma^r_\iota\{(R_{rp} - \tfrac{1}{2} g_{rp} R) - (F_{kr} F^k{}_p - \tfrac{1}{4} g_{rp} F_{kl} F^{kl})\}. \tag{41}$$ [1]

Indem wir endlich (37) mit $-A_\tau \gamma^\iota_i$ multiplizieren, bezüglich der Indizes $i\,p\,q$ zyklisch vertauschen, addieren und halbieren, ergibt sich so der antisymmetrische Tensor

$$N_{piq} = F_{pi;q} + F_{iq;p} + F_{qp;i} = F_{pi,q} + F_{iq,p} + F_{qp,i}. \tag{42}$$

§ 6. Die Feldgleichungen.

Im folgenden bedienen wir uns der beiden bekannten Identitäten

$$(R_r{}^p - \tfrac{1}{2}\delta_r{}^p R)_{;p} \equiv 0, \tag{43}$$

$$(F_{kr} F^{kp} - \tfrac{1}{4}\delta_r{}^p F_{kl} F^{kl})_{;p} \equiv F_{kr} F^{kp}{}_{;p} + \tfrac{1}{2}(F_{pk;r} + F_{kr;p} + F_{rp;k}) F^{kp}_{\cdot}, \tag{44}$$

deren erste sich am bequemsten durch zweimalige Verjüngung aus der Bianchischen Identität des gewöhnlichen Krümmungstensors ableiten läßt, während die zweite leicht direkt zu verifizieren ist. Mit Hilfe von (43), (44), (II) und (27) erhält man aus (41) durch Divergenzbildung nach dem Index p

$$U^p_{\iota;p} - \tfrac{1}{2}\gamma^r_\iota N_{rkp} F^{kp} \equiv 0. \tag{45}$$

Setzt man also als Feldgleichungen an

$$U_{\iota p} = 0, \tag{46}$$

$$N_{rkp} = 0 = F_{rk,p} + F_{kp,r} + F_{pr,k}, \tag{47}$$

so besteht zwischen ihnen die Identität (45). Multipliziert man (41) einerseits mit γ^ι_q, andererseits mit A^ι, so erkennt man, daß sich (46) in den Gleichungen spaltet

[1] In der Festsetzung (41) ist das Riemannsche R eingeführt, obwohl es sich nicht durch algebraische Operationen aus dem Tensor der Fünferkrümmung ableiten läßt. Die Rechtfertigung hierfür liefert die Identität (45), in welcher die Ableitung von R durch Fünfertensoren ausgedrückt ist (implizite).

$$(R_{qp} - \tfrac{1}{2} g_{qp} R) - (F_{kq} F^{k}{}_{p} - \tfrac{1}{4} g_{qp} F_{kl} F^{kl}) = 0\,, \tag{46a}$$

$$F^{pk}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g}\, F^{pk}) = 0\,, \tag{46b}$$

welche ebenso wie (47) nur mehr die g_{ik} und F_{ik} enthalten. Damit sind wir auf diejenigen Gleichungen gekommen, welche auch bisher in der allgemeinen Relativitätstheorie als die Feldgesetze der Gravitation und Elektrizität betrachtet worden sind, nur daß durch Gleichung (46) die Gravitationsgleichungen und das erste Maxwellsche Gleichungssystem in ein einziges Gleichungssystem zusammengefaßt sind, und daß alle drei Gleichungssysteme mit der »Krümmung« in Zusammenhang gebracht sind. Die Korpuskeln sind in dieser Theorie gar nicht, oder — was auf dasselbe hinauskommt — als Singularitäten enthalten.

§ 7. Einführung spezieller Koordinaten im V_5.

Unter den möglichen Festsetzungen bezüglich der Koordinatenwahl im V_5 erscheint jene die natürlichste, welche die $\gamma^{\iota}{}_{p}$ auf $\delta^{\iota}{}_{p}$ und A^{ι} auf $\delta^{\iota}{}_{5}$ spezialisiert ($\delta^{\iota}{}_{p}$ gleich 1 bzw. 0, je nachdem $\iota = p$ oder $\iota \neq p$, $\delta^{\iota}{}_{5}$ gleich 1 bzw. 0, je nachdem $\iota = 5$ oder $\iota \neq 5$ ist).

Ist nämlich

$$a^{\iota} = M^{\iota}{}_{\tau} \bar{a}^{\tau}$$

eine Transformation auf neue Fünferkoordinaten, so gilt

$$\gamma^{\iota}{}_{p} = M^{\iota}{}_{\tau} \bar{\gamma}^{\tau}{}_{p}$$
$$A^{\iota} = M^{\iota}{}_{\tau} \bar{A}^{\tau}.$$

Wenn wir also $\bar{\gamma}^{\tau}{}_{p} = \delta^{\tau}{}_{p}$, $\bar{A}^{\tau} = \delta^{\tau}{}_{5}$ haben wollen, so brauchen wir nur

$$M^{\iota}{}_{p} = \gamma^{\iota}{}_{p}$$
$$M^{\iota}{}_{5} = A^{\iota}$$

zu wählen. Aus der Gleichung

$$\bar{b}_{\kappa} = M^{\iota}{}_{\kappa} b_{\iota}$$

folgt dann auch

$$\bar{\gamma}_{\kappa}{}^{p} = \delta_{\kappa}{}^{p} \quad (= 1 \text{ für } \kappa = p\,;\ = 0 \text{ für } \kappa \neq p)$$
$$\bar{A}_{\kappa} = \delta_{\kappa}{}^{5} \quad (= 1 \text{ für } \kappa = 5\,;\ = 0 \text{ für } \kappa \neq p)$$

Wenn wir nach vollzogener Transformation die Querstriche weglassen, so gilt:

$$\gamma^{\iota}{}_{p} = \delta^{\iota}{}_{p}\,,\ \gamma_{\iota}{}^{p} = \delta_{\iota}{}^{p}\,,\ A^{\iota} = \delta^{\iota}{}_{5}\,,\ A_{\iota} = \delta_{\iota}{}^{5}\,. \tag{48}$$

Wenn wir nun eine Transformation der Raumkoordinaten x^{ι} vornehmen, so müssen wir, damit (48) fortbestehe, die Fünferkoordinaten so mittransformieren, daß sich die a^{ι} bzw. a_{ι} ($\iota = 1 \cdots 4$) wie die Komponenten eines kontra- bzw. kovarianten Vierervektors verhalten, während sich a^5 bzw. a_5 wie eine Invariante transformiert.

Es wäre aber falsch, zu schließen, ein Fünfervektor sei nichts als eine Art »Summe« aus einem Vierervektor und einem Skalar. Zwei Größen sind nur dann gleich, wenn sie bei keiner definierten Operation verschiedene Ergebnisse liefern. Aber das absolute Differential eines Fünfervektors ist von dem des »ihm gleichen« Vierervektors + Skalar verschieden.

Im neuen Koordinatensystem ergibt sich aus der Schreibweise die Schwierigkeit, die vier ersten Komponenten des Fünfervektors a^{ι} von den numerisch gleichen des ihm zugeordneten Vierervektors $a^{k} = \gamma_{\iota}{}^{k} a^{\iota}$ zu unterscheiden. Wir wollen $a^{\underline{k}}$ schreiben, um die vier ersten Komponenten des Fünfervektors a^{ι} zu bezeichnen. Dann gilt als numerische Relation

$$a^{\underline{k}} = a^{k} \tag{49}$$

an Stelle der Beziehung

$$\gamma_{\iota}{}^{k} a^{\iota} = a^{k}.$$

Analog wollen wir $T^{\cdot}{}_{\cdot\,\underline{k}\,\cdot}$ schreiben, wenn wir einen der vier ersten Indizes von $T^{\cdot}{}_{\cdot\,\kappa\,\cdot}$ meinen.

In unserem Koordinatensystem hat die ausgezeichnete Ebene A die Gleichung $a^5 = a_5 = 0$. Aus $A_{\iota} a^{\iota} = g_{\iota\kappa} a^{\iota} a^{\kappa} = 0$ für Vektoren der Ebene A schließen wir

$$g_{5\kappa} = 0 \tag{50}$$

und aus $g_{\iota\kappa} A^{\iota} A^{\kappa} = 1$

$$g_{55} = 1\,. \tag{51}$$

Gleichung (12) nimmt hier die Form an

$$g_{\underline{ik}} = g_{ik}\,. \tag{52}$$

Wir betrachten die durch die Γ charakterisierte Parallelverschiebung des Fünfervektors.

Festsetzung I ($g_{\iota\kappa;q} = 0$) liefert mit Rücksicht auf (52), (50), (51)

$$\left.\begin{aligned} g_{jk,q} - \Gamma^{\kappa}_{\underline{j}q} g_{\kappa k} - \Gamma^{\kappa}_{\underline{k}q} g_{j\kappa} &= 0 \\ - \Gamma^{\kappa}_{5q} g_{\kappa k} - \Gamma^{5}_{\underline{k}q} &= 0 \\ - \Gamma^{5}_{5q} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Festsetzung II war, daß bei Parallelverschiebung des Vierervektors a^{i} der invariante Zuwachs $\mathfrak{d} a^{\iota}$ des ihm in der Ebene A zugeordneten Vektors $a^{\iota} = \gamma^{\iota}{}_{k} a^{k}$ in die Richtung A^{ι} fällt, daß also bei unserer Koordinatenwahl $\mathfrak{d} a^{i}$ verschwinden soll.

Aus

$$da^{i} + \left\{ {i \atop pq} \right\} a^{p} dx^{q} = 0$$

hat also

$$da^{i} + \Gamma^{i}_{\underline{p}q} a^{\underline{p}} dx^{q} = 0 \quad (a^5 = 0)\,,$$

zu folgen, oder wegen $a^i = a^i$

$$\Gamma^i_{pq} = \left\{ {i \atop pq} \right\}. \tag{54}$$

Festsetzung III besagt: Verschieben wir den Vektor a^k parallel in seiner eigenen Richtung, so soll auch der invariante Zuwachs δa^i des ihm in der A-Ebene zugeordneten Vektors $a^i = \gamma^i_k a^k$ verschwinden. Es muß also neben δa^i auch δa^5 verschwinden:

$$\delta a^5 = da^5 + \Gamma^5_{pq} a^p a^q = 0,$$

was wegen $a^5 = 0$ (und $da^5 = 0$) und $a^p = a^p$ zur Folge hat

$$\Gamma^5_{pq} = -\Gamma^5_{qp}, \tag{55}$$

und zwar ist Γ^5_{pq} hier der Ausdruck der von uns mit F_{pq} bezeichneten Größe (elektromagnetische Feldstärke). (53), (54) und (55) zeigen, daß die Γ durch die g_{ik} und F_{ik} völlig bestimmt sind (bei fixiertem Koordinatensystem im V_5).

Die Benutzung der speziellen Koordinaten hat den Vorteil, daß sich die Gleichungen infolge der Elimination der entbehrlichen Feldvariabeln einfacher schreiben. Man muß aber dafür den Index 5 auszeichnen, wodurch die Zahl der Gleichungen vermehrt und die Erkenntnis der natürlichen formalen Zusammenhänge erschwert wird. Wir haben uns daher von vornherein bei unserer Darstellung allgemeiner Koordinaten im V_5 bedient; es sei aber bemerkt, daß wir auf die ganze Theorie zuerst aufmerksam wurden durch Überlegungen, welche den in diesem Paragraph durchgeführten ähnlich waren. Wir verzichten darauf, die übrigen früher gegebenen Überlegungen und Resultate in das spezielle Koordinatensystem zu übertragen.

§ 8. Feldgleichungen und Bewegungsgesetz.

Es soll noch gezeigt werden, daß die in § 6 postulierten Feldgleichungen zu dem unabhängig von ihnen in § 4 aufgestellten Bewegungsgesetz in einer natürlichen Beziehung stehen. Dabei ist zu beachten, daß in der Theorie das Wesen der materiellen Teilchen noch nicht erfaßt ist, so daß diese als singuläre Punkte behandelt werden müßten. Statt dessen ist es aber einfacher, den Gleichungen ein fiktives Glied hinzuzufügen, welches die Dichte der Materie ausdrückt; dadurch kann man nämlich mit der Betrachtung von kontinuierlichen Funktionen auskommen, was rechnerisch einfacher ist.

Wir nehmen an, daß überall, auch da wo »Materie« vorhanden ist, Gleichung (47) exakt gelte (Abwesenheit magnetischer Massen). Dann folgt aus (45), daß überall die Gleichung

$$U^{\ p}_{i\ ;p} = 0 \tag{56}$$

exakt erfüllt ist. Dagegen haben wir auf die rechte Seite von (46) den fingierten gemischten Tensor der Dichte der Materie zu setzen. In Analogie zu dem primitivsten Ansatz hierfür, welcher in der alten Gravitationstheorie druckfreie (staubartige) Materie darstellt, setzen wir an Stelle von (46)

$$U^{ip} = \mu \xi^i \xi^p \tag{57}$$

(ξ^i) ist ein Fünfervektor, dem der Vierervektor $(\gamma_i^{\ p} \xi^i)$ oder (ξ^p) zugeordnet ist. Wegen (56) ergibt sich

$$(\mu \xi^p)_{;p} \xi^i + \mu \xi^i_{\ ;p} \xi^p = 0. \tag{58}$$

Aus (57) geht hervor, daß μ erst dann festgelegt ist, wenn man durch Normierung den »Betrag« von ξ^i festlegt, d. h. wenn man z. B. setzt

$$\xi^i \xi_i = \text{konst.} \tag{59}$$

Dann liefert (58) durch Multiplikation mit ξ_i wegen $\xi_i \xi^i_{\ ;p} = \frac{1}{2}(\xi_i \xi^i)_{;p} = 0$:

$$(\mu \xi^p)_{;p} = 0, \tag{60}$$

wodurch (58) übergeht in

$$\xi^i_{\ ;p} \xi^p = 0. \tag{61}$$

Wir fassen nun die Kurven des Koordinatenraumes ins Auge, die das ξ^p-Feld »tangieren«, bei geeigneter Parameter-Wahl ist

$$\frac{dx_p}{dt} = \xi^p(x_1, \cdots x_4) \tag{62}$$

das System der diese Kurven definierenden Differentialgleichungen.

Gleichung (61) besagt dann, daß längs einer solchen Kurve $\delta \xi^i = 0$ ist, d. h. aber, daß ξ^i in der ihm zugeordneten Richtung ($\xi^p = \gamma_i^{\ p} \xi^i$) parallel verschoben ist.

Die bei dieser Verschiebung entstehenden Kurven (62) sind im § 4 behandelt worden und genügen dem Gleichungssystem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \left\{ {k \atop pq} \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \rho F^k_{\ r} \frac{dx^r}{dt}, \quad \rho = \text{konstant}. \tag{63}$$

Aus Gleichung (60) läßt sich nun weiter zeigen, daß diese Kurven die »Bahnkurven der Materie« darstellen. Betrachten wir nämlich einen aus solchen Kurven gebildeten Faden, so besagt (60) (Kontinuitätsgleichung), daß das Verschwinden bzw. Nichtverschwinden der Dichtefunktion μ sich längs des Fadens fortpflanzt oder genauer, daß längs eines solchen Fadens die »Masse« konstant ist, was aber inhaltlich der Behauptung äquivalent ist.

Die hier dargelegte Theorie liefert die Gleichungen des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes zwanglos auf einheitlichem Wege; dagegen liefert sie vorläufig kein Verständnis für den Bau der Korpuskeln sowie für die in der Quantentheorie zusammengefaßten Tatsachen.

Ausgegeben am 2. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.