PERCACC

Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss. 1932

Erschienen im Akademie-Verlag, 108 Berlin, Leipziger Straße 3–4

Lizenznummer: 202 · 100/543/45/78
Gesamtherstellung: VEB Kongreß- und Werbedruck, 9273 Oberlungwitz
Reprinted in GDR

EINHEITLICHE THEORIE VON GRAVITATION UND ELEKTRIZITÄT

ZWEITE ABHANDLUNG

VON

A. EINSTEIN UND W. MAYER

In einer im vorigen Jahre erschienenen Arbeit (Sitz. Ber. XXV. 1931) haben wir gezeigt, daß durch Einführung von Fünfervektoren im vierdimensionalen Raume sich eine Raumstruktur ergibt, die ungezwungen zu einer einheitlichen Theorie von Gravitation und Elektrizität führt. Die sich ergebenden elektromagnetischen Gleichungen stimmten mit den allgemein relativistisch geschriebenen Maxwellschen Gleichungen des leeren Raumes überein. Diese Gleichungen erlauben keine von null verschiedene elektrische Massen- und Stromdichte, können daher im Innern elektrischer Korpuskeln nicht gültig sein. In einer solchen Theorie können elektrische Korpuskeln nur als Singularitäten des Feldes figurieren. Eine befriedigende Feldtheorie muß aber nach unserer Überzeugung mit einer singularitätsfreien Beschreibung des Gesamtfeldes, also auch des Feldes im Innern der Korpuskeln, auskommen.

Deshalb stellten wir uns die Frage, ob die von uns betrachtete Raumstruktur nicht eine Verallgemeinerung zulasse, die zu elektromagnetischen Gleichungen mit nicht verschwindender elektrischer Dichte führen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß es eine ganz natürliche derartige Verallgemeinerung gibt, welche zur Aufstellung eines kompatibeln Systems von Feldgleichungen Veranlassung gibt. Die Frage der Eignung dieses Gleichungssystems zur Beschreibung der Wirklichkeit soll hier noch nicht behandelt werden.

Die einzige Änderung gegenüber der früher betrachteten Raumstruktur besteht darin, daß die in § 3 l. c. figurierende Hypothese II fallengelassen wird. Es zeigt sich, daß die Aufstellung kompatibler Feldgleichungen für diese Raumstruktur an die Vierdimensionalität des Kontinuums gebunden ist.

§ 1. Die Raumstruktur.

§ 1 und § 2 l. c. sei hier unverändert übernommen, ebenso aus § 3 die Hypothese I, welche durch die Festsetzung

$$g_{\iota\kappa;\varrho} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

charakterisiert ist. An die Stelle des Restes des § 3 l. c. tritt aber folgendes.

Jedenfalls muß sich die Ableitung $\gamma^{\iota}_{k;q}$ in der Form darstellen lassen

$$\gamma^{\iota}_{k;q} = A^{\iota} F_{kq} + \gamma^{\iota r} V_{rkq}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wobei F_{kq}, V_{rkq} Tensoren von vorläufig unbekannten Symmetrie-Eigenschaften sind. Diese Gleichung hat wegen des Verschwindens von $\gamma^{\iota}_k A_{\iota}$ (also auch von $(\gamma^{\iota}_k A_{\iota})_{;q}$) die Gleichung

$$A_{\iota;q} = -\gamma_{\iota}^{k} F_{kq} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zur Folge.

Das Verschwinden von $g_{ik;q} \equiv (\gamma_{\iota i}\gamma^{\iota}_{k})_{;q}$ verlangt mit Rücksicht auf (1) die Antisymmetrie von V_{rkq} bezüglich der ersten beiden Indizes. Hierdurch wird auch das Verschwinden der absoluten Ableitungen von $g^{\iota\kappa} (= A^{\iota} A^{\kappa} + \gamma^{\iota}_{k}\gamma^{\kappa k})$ erzielt; was ja gemäß (I) gefordert werden muß.

Wir betrachten wieder einen Vierervektor a^k und den ihm in der »ausgezeichneten Ebene« ihm zugeordneten Fünfervektor

$$a^{\iota} = \gamma^{\iota}_{k} a^{k}.$$

Verschiebt man a^k irgendwie längs einer Kurve, so wird a^{ι} mitverschoben, und es besteht die Relation

$$\delta a^{\iota} = \gamma^{\iota}_{k}\, \delta a^{k} + (A^{\iota} F_{kq} + \gamma^{\iota r} V_{rkq})\, a^{k} dx_q .$$

Nach unserer dritten Festsetzung (die zweite fällt ja hier weg) soll δa^{ι} verschwinden, wenn a^k in seiner eigenen Richtung parallel verschoben wird, d. h. wenn δa^k verschwindet und dx_q proportional a^q ist. Deshalb muß sein

$$F_{kq} = -F_{qk}$$

$$V_{rkq} = -V_{rqk} .$$

Da V_{rkq} in den beiden ersten Indizes ebenfalls antisymmetrisch ist, so ist es überhaupt antisymmetrisch.

Es sei bemerkt, daß die Ableitung des § 4 l. c. der durch Parallelverschiebung eines Fünfervektors in der ihm zugeordneten Richtung charakterisierten Linie, welche ja die klassische Bewegungsgleichung des elektrisch geladenen Massenpunktes ergibt, hier ungeändert gültig bleibt.

§ 2. Krümmung und Feldgleichungen.

Leitet man für diese erweiterte Struktur die Fünferkrümmung ab, so erhält man nach der § 5 l. c. angegebenen Methode

$$\left.\begin{aligned} P_{\sigma\iota qp} &= (\gamma_{\sigma}^{k} A_{\iota} - \gamma_{\iota}^{k} A_{\sigma})(F_{kq;p} - F_{kp;q} + V_{rkq} F^{r}{}_{p} - V_{rkp} F^{r}{}_{q}) \\ &+ \gamma_{\sigma}^{k}\gamma_{\iota}^{r}(R_{krqp} - F_{kq} F_{rp} + F_{kp} F_{rq} - V_{tkq} V^{t}{}_{rp} + V_{tkp} V^{t}{}_{rq} - V_{krq;p} + V_{krp;q}) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Multiplikation mit $\gamma^{\sigma q}$ (einmalige Verjüngung) führt zu

$$P_{\iota p} = \gamma_{\iota}^{r}(R_{rp} - F_{rq} F_{p}{}^{q} - V_{tqr} V^{tq}{}_{p} + V_{rp}{}^{q}{}_{;q}) + A_{\iota}(F_{p}{}^{q}{}_{;q} - V_{prq} F^{rq}). \quad (4)$$

Hieraus durch nochmalige Verjüngung

$$P = R - F_{rq} F^{rq} - V_{rqp} V^{rqp} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Wir wenden uns nun zur Aufstellung der Feldgleichungen. Diese dürfen nicht willkürlich gewählt werden, etwa durch Nullsetzung der einfachsten aus der Fünferkrümmung algebraisch zu gewinnenden Ausdrücke; das zu wählende Gleichungssystem muß vielmehr auch der Bedingung der Kompatibilität entsprechen: es muß die Variabeln vollständig bestimmen, aber derart, daß jede Lösung in einem Querschnitt (z. B. $x_4 =$ konst.) sich im Einklang mit dem Gleichungssystem fortsetzen läßt.

In Anlehnung an die erste Arbeit setzen wir zunächst fest, daß das Gleichungssystem

$$G_{\iota p} \equiv P_{\iota p} - \tfrac{1}{4}\gamma_{\iota p} P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

erfüllt sein soll. Dann muß im Speziellen auch der antisymmetrische Teil, den wir H_{qp} nennen, von $\gamma^{\iota}_{q} G_{\iota p}$ verschwinden:

$$0 = V^{rpq}{}_{;q} (\equiv H^{rp}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Aus (7) kann man folgern, daß sich der Tensor V durch einen Skalar ausdrücken läßt. Unter Verwendung des bekannten antisymmetrischen Pseudo-Skalars $\eta^{lrpq} (\equiv (-g)^{-\frac{1}{2}} \delta^{lrpq})$, wobei $\delta^{lrpq} = \pm 1$ ist, je nachdem $l\,r\,p\,q$ durch eine gerade oder ungerade Zahl von Vertauschungen aus der Permution 1 2 3 4 zu gewinnen ist, läßt sich setzen

$$V^{rpq} = \eta^{lrpq} \varphi_l .$$

Da die kovarianten Ableitungen von η verschwinden, so ist

$$V^{rpq}{}_{;q} = \eta^{lrpq} \varphi_{l;q},$$

was nur dann verschwindet, wenn

$$0 = \varphi_{l;q} - \varphi_{q;l} = \varphi_{l,q} - \varphi_{q,l} = 0 .$$

φ_l hat also die Form $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_l}$. Es tritt also zu den Feldgrößen der ursprünglichen Theorie de facto nur eine Variable hinzu.

Gleichung (6) spalten wir nun in die beiden Gleichungssysteme

$$0 = A^{\iota} G_{\iota p} = G_p = F_{p}{}^{q}{}_{;q} - V_{prq} F^{rq} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = \gamma^{\iota}_{q} G_{\iota p} = G_{qp} &= (R_{qp} - \tfrac{1}{4} g_{qp} R) - (F_{sq} F^{s}{}_{p} - \tfrac{1}{4} g_{qp} F_{st} F^{st}) \\ &- (V_{stq} V^{st}{}_{p} - \tfrac{1}{4} g_{qp} V_{str} V^{str}) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{b})$$

(6a) entspricht dem ersten Maxwellschen Gleichungssystem, das zweite Glied der elektrischen Stromdichte. (6b) entspricht den Gleichungen des Gravitationsfeldes, jedoch ohne die zugehörige skalare Gleichung, indem die Verjüngung von (6b) identisch verschwindet.

Um zu dem zweiten Maxwellschen Gleichungssystem zu gelangen, wie es vom Standpunkte unserer Raumstruktur das Natürlichste ist, bildet man $-A^{\tau}\gamma, P_{\cdot\,qp}(=2P_{rqp})$ und hierauf durch zyklische Vertauschung den in allen drei Indizes antisymmetrischen Ausdruck

$$G_{rqp} = P_{rqp} + P_{qpr} + P_{prq}$$

oder nach einer von Schouten herrührenden abkürzenden Bezeichnungsweise $P_{[rqp]}$ und setzt dies gleich Null. Man erhält so in analoger Bezeichnungsweise

$$o = G_{rqp} = F_{[rq;p]} + V_{s[rq}F^{s}{}_{p]}\,^{1}. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Was nun noch fehlt, ist offenbar die skalare Gleichung des Gravitationsfeldes sowie eine Gleichung, welche die analytische Fortsetzung von φ bestimmt. Diese fehlenden Gleichungen folgen nicht aus der betrachteten Raumstruktur, sondern nur aus der Bedingung der Kompatibilität des gesamten Gleichungssystems, die ihrerseits auf dem Bestehen gewisser Identitäten beruht, wie später gezeigt werden soll.

Aus (6a) folgt

$$G^{p}{}_{;p} \equiv F^{pq}{}_{;q;p} - V^{prq}{}_{;p}F_{rq} - V^{prq}F_{rq;p}\,.$$

Das erste Glied der rechten Seite verschwindet identisch. Für das zweite schreiben wir gemäß (7) $-F_{rq}H^{rq}$. Das dritte kann $-\frac{1}{3}V^{prq}F_{[pr;q]}$ geschrieben werden und wegen (8) in der Form $-\frac{1}{3}V^{prq}G_{prq} + V^{prq}V_{spr}F^{s}{}_{q}$, wobei der letzte Term aus Symmetriegründen verschwindet. Man erhält also die Identität

$$G^{p}{}_{;p} + H^{rq}F_{rq} + \tfrac{1}{3}G^{prq}V_{prq} \equiv o. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Analog führt auch die Betrachtung des zweiten Maxwellschen Systems (8) zur Aufstellung einer Identität. Wir führen zunächst eine für die Rechnung bequeme Bezeichnungsweise ein. In irgendeinem in bezug auf kein Indexpaar symmetrischen kovarianten oder kontravarianten Tensor $A_{ik\ldots}$ gibt es einen antisymmetrischen $\{A_{ik\ldots}\}$, der so definiert ist: Man bildet alle durch Permutation der Indizes zu bildenden Tensoren und aus diesen ein Aggregat mit dem

[1] Es existiert auch ein kompatibles Gleichungssystem, wobei statt (8)

$$o = F_{[rq;p]} + \beta V_{s[rq}F^{s}{}_{p]} \equiv G_{rqp}$$

mit konstantem β gesetzt wird. Unter diesen Möglichkeiten ist der Fall $\beta = o$ formal ausgezeichnet; es tritt nämlich dann an die Stelle der Ableitung des zweiten Maxwell-Systems aus dem Krümmungstensor die Voraussetzung der Existenz eines Viererpotentials, wobei das Auftreten eines magnetischen Viererstromes vermieden würde.

Gliedfaktor +1 oder −1, je nachdem die betreffende Permutation gerade oder ungerade ist. Bei Verwendung dieser Bezeichnungsweise folgt zunächst

$$\{G_{rqp;t}\} \equiv 3\{F_{rq;p;t}\} + 3\{V_{srq;t}F^{s}{}_{p}\} + 3\{V_{srq}F^{s}{}_{p;t}\}\,.$$

Das erste Glied der rechten Seite verschwindet bekanntlich wegen der Antisymmetrie von F. Das zweite, welches auch $3\{V^{s}{}_{rq;t}F_{sp}\}$ geschrieben werden kann, berechnen wir in einem Punkt des Raumes zunächst für ein lokales Koordinatensystem, in welchem $g_{ik} = \delta_{ik}$ ist. Es kommt dann für die Summation nach s wegen der Antisymmetrie der Tensoren im angeschriebenen Term nur $s = t$ in Betracht, so daß wir es in der (ersten) Form $3\{V^{s}{}_{rq;s}F_{tp}\}$ $(s = t)$ schreiben können. Wegen der Definition von $\{\ \}$ kann man es aber auch in der Form $-3\{V^{s}{}_{rq;p}F_{st}\}$ oder $3\{V^{s}{}_{rq;p}F_{ts}\}$ schreiben, wobei nur $s = p$ in Frage kommt. Deshalb ist auch die Schreibweise $3\{V^{s}{}_{rq;s}F_{tp}\}$ $(s = p)$ richtig (zweite Form). Die Verschmelzung beider Formen ergibt $\frac{3}{2}\{V^{s}{}_{rq;s}F_{tp}\}$, wobei nun der Summationsindex s keinen einschränkenden Bedingungen mehr unterliegt. Dies kann [vgl. (8)] auch $\frac{3}{2}\{H_{rq}F_{tp}\}$ geschrieben werden, welche Schreibweise natürlich von der Koordinatenwahl unabhängig ist.

Analog verfahren wir mit dem dritten Glied, indem wir für die Rechnung das Koordinatensystem wieder lokal spezialisieren. Für dies Glied kann zunächst

$$\{V_{srq}F^{s}{}_{p;t}\} + \{V_{sqt}F^{s}{}_{p;r}\} + \{V_{str}F^{s}{}_{p;q}\}$$

gesetzt werden, wobei s im ersten Term nur den Wert t, im zweiten nur den Wert r, im dritten nur den Wert q haben kann. Das Glied kann deshalb in der Form

$$\{V_{trq}F^{s}{}_{p;s}\}$$

geschrieben werden, wobei der Index s keiner Beschränkung mehr unterliegt. Hierfür kann gemäß (6a) geschrieben werden

$$\{V_{trq}G_{p}\} + \{V_{trq}V_{plm}F^{lm}\}\,.$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes verschwindet aber aus Symmetriegründen. Wir ersetzen es nämlich durch

$$2\,[\{V_{trq}V_{prq}F^{rq}\} + \{V_{trq}V_{pqt}F^{qt}\} + \{V_{trq}V_{ptr}F^{tr}\}]\,.$$

Jedes dieser Glieder verschwindet, z. B. das erste wegen Symmetrie von $V_{trq}V_{prq}$ bezüglich der Indizes p und t. Die betrachtete Identität nimmt also die Form an

$$\{G_{rqp;t}\} + \tfrac{3}{2}\{H_{rq}F_{pt}\} - \{G_{r}V_{qpt}\} \equiv o. \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Es wird sich zeigen, daß die Kompatibilität des Gesamtsystems noch die Existenz einer Vereridentität erfordert, welche durch Divergenzbildung aus

(6b) zu erlangen ist. Mit Rücksicht auf (43) und (44) l. c. erhalten wir

$$G_{q\ ;p}^{p} \equiv \tfrac{1}{4} R_{,q} - F^{kp}{}_{;p} F_{kq} + \tfrac{1}{2} F_{[kp;q]} F^{kp} - V^{stp}{}_{;p} V_{stq} - V_{stq;p} V^{stp} + \tfrac{1}{4} V_{,q},$$

wobei zur Abkürzung

$$V \equiv V_{stp} V^{stp}$$

gesetzt ist. Die Glieder der rechten Seite außer dem ersten und letzten formen wir nach (6a) und (8) um:

$$-F^{kp}{}_{;p} F_{kq} \equiv -G^k F_{kq} - V^{krt} F_{rt} F_{kq}.$$

Man sieht, daß $V^{krt} F_{rt} F_{kq} \equiv \tfrac{1}{3} V^{krt} F_{[rt} F_{k]q}$. Aber $F_{[rt} F_{k]q}$ ist in allen Indizes schiefsymmetrisch und also $\equiv \tfrac{1}{8} \{F_{rt} F_{kq}\}$.

Somit gilt

$$-F^{kp}{}_{;p} F_{kq} \equiv -G^k F_{kq} - \tfrac{1}{24} V^{krt} \{F_{rt} F_{kq}\}.$$

Gemäß (8) ist

$$+\tfrac{1}{2} F_{[kp;q]} F^{kp} \equiv +\tfrac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} - \tfrac{1}{2} V_{s[kp} F^{s}{}_{q]} F^{kp}.$$

Beim Auflösen des Schouten-Symbols im zweiten Glied rechts fallen aus Symmetriegründen der zweite und der dritte Term weg, so daß dieses die Form $-\tfrac{1}{2} V_{skp} F^{s}{}_{q} F^{kp}$ oder $-\tfrac{1}{2} V^{skp} F_{sq} F_{kp}$ annimmt. Dieses ist nach dem oben Gesagten $\equiv -\tfrac{1}{48} V^{skp} \{F_{sq} F_{kp}\}$, so daß gilt

$$+\tfrac{1}{2} F_{[kp;q]} F^{kp} \equiv \tfrac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} - \tfrac{1}{48} V^{skp} \{F_{sq} F_{kp}\}.$$

Das vierte Glied obiger Identität wird gemäß (7)

$$-V^{stp}{}_{;p} V_{stq} \equiv -H^{st} V_{stq}.$$

Behufs Umformung des fünften Gliedes betrachten wir den Ausdruck $-V^{stp}\{V_{stq;p}\}$. Jede der 18 Indexpermutationen in { }, bei welcher q vor dem Differentiationszeichen steht, liefert den Wert des gesuchten 5ten Gliedes; jede der sechs Indexkombinationen, bei denen q nach dem Differentiationszeichen steht, liefert den Wert $+\tfrac{1}{2} V_{,q}$. Demnach hat man

$$-V_{stq;p} V^{stp} \equiv -\tfrac{1}{18} V^{stp} \{V_{stq;p}\} - \tfrac{1}{6} V_{,q}.$$

Auf Grund aller dieser Umformungen erhält man die untersuchte Identität in der Gestalt

$$G_{q\ ;p}^{p} + G^k F_{kq} - \tfrac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} + H^{st} V_{stq} \equiv \tfrac{1}{4}(R + \tfrac{1}{3} V)_{,q} - \tfrac{1}{18} V^{skp} \{V_{qsk;p} - \tfrac{9}{8} F_{qs} F_{kp}\}.$$

Diese Identität legt es nahe, den bisher gesetzten Feldgleichungen noch folgende zwei zu adjungieren:

$$G \equiv R + \tfrac{1}{3} V_{pqr} V^{pqr} - \lambda = 0, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

wobei λ eine universelle Konstante bedeutet, sowie

$$G_{qskp} \equiv \{V_{qsk;p} - \tfrac{9}{8} F_{qs} F_{kp}\} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Diese Gleichung kann auch leicht in die Form gebracht werden

$$(V_{123;4} - V_{234;1} + V_{341;2} - V_{412;3}) - \tfrac{3}{2}(F_{12} F_{34} + F_{13} F_{42} + F_{14} F_{23}) = 0$$

oder kürzer

$$V_{[123;4]} - \tfrac{3}{2} F_{1[2} F_{34]} = 0.$$

Obige Identität nimmt dann die Formen an

$$G_{q\ ;p}^{p} + G^k F_{kq} - \tfrac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} + H^{st} V_{stq} - \tfrac{1}{4} G_{,q} + \tfrac{1}{18} G_{qskp} V^{skp} \equiv 0. \quad (12)$$

Endlich ist noch hinzuzufügen, daß die Feldgleichungen (7) die Identität

$$H^{rp}{}_{;p} \equiv 0 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

erfüllen.

§ 3. Die Kompatibilität der Feldgleichungen.

Dies sind die aufgestellten Feldgleichungen:

$$G_{qp} \equiv (R_{qp} - \tfrac{1}{4} g_{qp} R) - (F_{sq} F^{s}{}_{p} - \tfrac{1}{4} g_{qp} F_{st} F^{st})$$
$$- (V_{stq} V^{st}{}_{p} - \tfrac{1}{4} g_{qp} V_{rst} V^{rst}) = 0 \quad (6b)$$

$$G_p \equiv F_{p\ ;q}^{q} - V_{prq} F^{rq} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6a)$$

$$G_{rqp} \equiv F_{[rq;p]} + V_{s[rq} F^{s}{}_{p]} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$G \equiv R + \tfrac{1}{3} V_{prq} V^{prq} - \lambda = 0. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$G_{qskp} \equiv \{V_{qsk;p} - \tfrac{9}{8} F_{qs} F_{kp}\} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$H^{qp} \equiv V^{qpr}{}_{;r} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Sie sind verknüpft durch die Identitäten:

$$G_{q\ ;p}^{p} - \tfrac{1}{4} G_{,q} + G^k F_{kq} - \tfrac{1}{2} G_{kpq} F^{kp} + \tfrac{1}{18} G_{qskp} V^{skp} + H^{sk} V_{skq} \equiv 0 \quad . \ . \quad (13)$$

$$G^{p}{}_{;p} + H^{rq} F_{rq} + \tfrac{1}{3} G^{prq} V_{prq} \equiv 0 \quad . \ . \quad (9)$$

$$\{G_{rqp;s}\} + \tfrac{3}{2}\{H_{rq} F_{ps}\} - \{G_r V_{qps}\} \equiv 0 \quad . \ . \quad (10)$$

$$H^{rp}{}_{;p} \equiv 0 \quad . \ . \quad (14)$$

Die Zahl der abhängigen Funktionen ist 10+6+4 = 20. Die Zahl der zu ihrer (relativistischen) Bestimmung nötigen und hinreichenden voneinander unabhängigen Differentialgleichungen ist also 20−4 = 16. Die Zahl der aufgestellten Differentialgleichungen ist 9+4+4+1+1+6 = 25; es ist also ein Nachweis von deren Kompatibilität nötig.

Für diesen Nachweis ist es — wie der Bau von (13) zeigt — zweckmäßig, die Gleichungen (6b) und (11) zu einer Gleichung

$$\overline{G}_{\varrho p} \equiv G_{\varrho p} - \tfrac{1}{4}\, g_{\varrho p} G = 0$$

zusammenzufassen. Wir sondern nun die 9 Gleichungen

$$\overline{G}^{14},\ \overline{G}^{24},\ \overline{G}^{34},\ \overline{G}^{44},\ G^{4},\ G_{123},\ H^{14},\ H^{24},\ H^{34}$$

aus und nennen sie die *W*-Gleichungen, alle übrigen zusammengenommen die B-Gleichungen, deren Zahl $25-9=16$ ist.

Ein Blick auf die Identitäten zeigt nun, daß folgendes gilt: Sind die 16 B-Gleichungen im ganzen Raume erfüllt (was bestimmt erreichbar ist) und außerdem die W-Gleichungen in einem Schnitte $x_4 = \overline{x}_4 =$ konst, so sind die W-Gleichungen auch in dem »infinitesimal benachbarten« Schnitte $x_4 = \overline{x}_4 + dx_4$ erfüllt. Hieraus folgert man nach bekannten Methoden die Kompatibilität des aufgestellten Gleichungssystems.

Wir bemerken, daß Hr. Cartan[1] in einer allgemeinen und überaus aufklärenden Untersuchung jene Eigenschaft von Differentialgleichungssystemen tiefer analysiert hat, welche von uns in dieser Arbeit und früheren Arbeiten als »Kompatibilität« bezeichnet wurde.

Endlich nehmen wir die Gelegenheit wahr, der Macy-Stiftung in New York herzlich dafür zu danken, daß sie unsere Zusammenarbeit auch in diesem Jahre durch Verleihung eines Forschungsstipendiums an einen von uns möglich gemacht hat.

[1] E. Cartan, Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris 1931: Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications a la Relativité.

Ausgegeben am 30. April.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.