31.

Gravitation und Elektrizität

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
465—480 (1918)

Nach RIEMANN[1]) beruht die Geometrie auf den beiden folgenden Tatsachen:

1. *Der Raum ist ein dreidimensionales Kontinuum*, die Mannigfaltigkeit seiner Punkte lässt sich also in stetiger Weise durch die Wertsysteme dreier Koordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ zur Darstellung bringen;

2. (*Pythagoreischer Lehrsatz*) das Quadrat des Abstandes ds^2 zweier unendlich benachbarter Punkte

$$P = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad P' = (x_1 + dx_1,\, x_2 + dx_2,\, x_3 + dx_3) \tag{1}$$

ist (bei Benutzung beliebiger Koordinaten) eine quadratische Form der relativen Koordinaten dx_i:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (g_{ki} = g_{ik}). \tag{2}$$

Die zweite Tatsache drücken wir kurz dadurch aus, dass wir sagen: der Raum ist ein *metrisches* Kontinuum. Ganz dem Geiste der modernen Nahewirkungsphysik gemäss setzen wir den Pythagoreischen Lehrsatz nur im Unendlichkleinen als streng gültig voraus.

Die spezielle Relativitätstheorie führte zu der Einsicht, dass *die Zeit* als vierte Koordinate (x_0) gleichberechtigt zu den drei Raumkoordinaten hinzutritt, dass der Schauplatz des materiellen Geschehens, *die Welt*, also *ein vierdimensionales, metrisches Kontinuum* ist. Die quadratische Form (2), welche die Weltmetrik festlegt, ist dabei nicht positiv-definit wie im Falle der dreidimensionalen Raumgeometrie, sondern vom Trägheitsindex 3. Schon RIEMANN äusserte den Gedanken, dass sie als etwas physisch Reales zu betrachten sei, da sie sich z. B. in den Zentrifugalkräften als eine auf die Materie reale Wirkungen ausübende Potenz offenbart, und dass man demgemäss anzunehmen habe, die Materie wirke auch auf sie zurück; während bis dahin alle Geometer und Philosophen die Vorstellung gehabt hatten, dass die Metrik dem Raum an sich, unabhängig von dem materialen Gehalt, der ihn erfüllt, zukomme. Auf diesen Gedanken, zu dessen Durchführung RIEMANN durchaus noch die Möglichkeit fehlte, hat in unsern Tagen EINSTEIN (unabhängig von RIEMANN) das grandiose Gebäude seiner allgemeinen Relativitätstheorie errichtet. Nach EIN-

---

[1]) B. RIEMANN, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Math. Werke, 2. Aufl. (Leipzig 1892), Nr. 13, S. 272.

STEIN kommen auch die Erscheinungen der *Gravitation* auf Rechnung der Weltmetrik, und die Gesetze, nach denen die Materie auf die Metrik einwirkt, sind keine andern als die Gravitationsgesetze; die g_{ik} in (2) bilden die Komponenten des Gravitationspotentials. – Während so das Gravitationspotential aus einer invarianten *quadratischen* Differentialform besteht, werden *die elektromagnetischen Erscheinungen* von einem Viererpotential beherrscht, dessen Komponenten φ_i sich zu einer invarianten *linearen* Differentialform $\Sigma \varphi_i\, dx_i$ zusammenfügen. Beide Erscheinungsgebiete, Gravitation und Elektrizität, stehen aber bisher völlig isoliert nebeneinander.

Aus neueren Darstellungen von LEVI-CIVITA[1]), HESSENBERG[2]) und des Verfassers[3]) geht mit voller Deutlichkeit hervor, dass einem naturgemässen Aufbau der Riemannschen Geometrie als Grundbegriff der der infinitesimalen Parallelverschiebung eines Vektors zugrunde zu legen ist. Sind P und P^* irgend zwei durch eine Kurve verbundene Punkte, so kann man einen in P gegebenen Vektor parallel mit sich längs dieser Kurve von P nach P^* schieben. Diese Vektorübertragung von P nach P^* ist aber, allgemein zu reden, nicht integrabel, d.h. der Vektor in P^*, zu dem man gelangt, hängt ab von dem Wege, längs dessen die Verschiebung vollzogen wird. Integrabilität findet allein in der Euklidischen («gravitationslosen») Geometrie statt. – In der oben charakterisierten Riemannschen Geometrie hat sich nun ein letztes ferngeometrisches Element erhalten – soviel ich sehe, ohne jeden sachlichen Grund; nur die zufällige Entstehung dieser Geometrie aus der Flächentheorie scheint daran schuld zu sein. Die quadratische Form (2) ermöglicht es nämlich, nicht nur zwei Vektoren in demselben Punkte, sondern auch in irgend zwei voneinander entfernten Punkten ihrer Länge nach zu vergleichen. *Eine wahrhafte Nahe-Geometrie darf jedoch nur ein Prinzip der Übertragung einer Länge von einem Punkt zu einem unendlich benachbarten kennen*, und es ist dann von vornherein ebensowenig anzunehmen, dass das Problem der Längenübertragung von einem Punkte zu einem endlich entfernten integrabel ist, wie sich das Problem der Richtungsübertragung als integrabel herausgestellt hat. Indem man die erwähnte Inkonsequenz beseitigt, kommt eine Geometrie zustande, die überraschenderweise, auf die Welt angewendet, *nicht nur die Gravitationserscheinungen, sondern auch die des elektromagnetischen Feldes erklärt.* Beide entspringen nach der so entstehenden Theorie aus derselben Quelle, ja *im allgemeinen kann man Gravitation und Elektrizität gar nicht in willkürloser Weise voneinander trennen.* In dieser Theorie haben *alle physikalischen Grössen eine weltgeometrische Bedeutung*; *die Wirkungsgrösse insbesondere tritt in ihr von vornherein als reine Zahl auf. Sie führt zu einem im wesentlichen eindeutig bestimmten Weltgesetz; ja sie gestattet sogar in einem gewissen Sinne zu begreifen, warum die Welt vierdimensional ist.* – Ich will den Aufbau der korrigierten Riemannschen Geometrie hier zunächst ohne jeden physikalischen Hintergedanken skizzieren; die physikalische Anwendung ergibt sich dann von selber.

---

[1]) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo ...*, Rend. Circ. Mat. Palermo *42* (1917).

[2]) G. HESSENBERG, *Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie*, Math. Ann. *78* (1917).

[3]) H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie* (Berlin 1918), § 14.

In einem bestimmten Koordinatensystem sind die relativen Koordinaten dx_i eines dem Punkte P unendlich benachbarten Punktes P' – siehe (1) – die Komponenten der *infinitesimalen Verschiebung* $\overrightarrow{PP'}$. Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern drückt sich durch stetige Transformationsformeln aus:

$$x_i = x_i(x_1^* \, x_2^* \ldots x_n^*) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

welche den Zusammenhang zwischen den Koordinaten desselben Punktes in dem einen und andern System festlegen. Zwischen den Komponenten dx_i bzw. dx_i^* derselben infinitesimalen Verschiebung des Punktes P bestehen dann die linearen Transformationsformeln

$$dx_i = \sum_k \alpha_{ik} \, dx_k^*, \tag{3}$$

in denen α_{ik} die Werte der Ableitungen $\partial x_i / \partial x_k^*$ in dem Punkte P sind. Ein (kontravarianter) *Vektor* $\mathfrak{x}$ im Punkte P hat mit Bezug auf jedes Koordinatensystem gewisse n Zahlen ξ^i zu Komponenten, die sich beim Übergang zu einem andern Koordinatensystem genau in der gleichen Weise (3) transformieren wie die Komponenten einer infinitesimalen Verschiebung. Die Gesamtheit der Vektoren im Punkte P bezeichne ich als den *Vektorraum* in P. Er ist 1. *linear oder affin*, d.h. durch Multiplikation eines Vektors in P mit einer Zahl, und durch Addition zweier solcher Vektoren entsteht immer wieder ein Vektor in P, und 2. *metrisch*: durch die zu (2) gehörige symmetrische Bilinearform ist je zwei Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit den Komponenten ξ^i, η^i in invarianter Weise ein skalares Produkt

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{x} = \sum_{ik} g_{ik} \, \xi^i \eta^k$$

zugeordnet. Nach unserer Auffassung *ist diese Form jedoch nur bis auf einen willkürlich bleibenden positiven Proportionalitätsfaktor bestimmt.* Wird die Mannigfaltigkeit der Raumpunkte durch Koordinaten x_i dargestellt, so sind durch die Metrik im Punkte P die g_{ik} nur ihrem Verhältnis nach festgelegt. Auch physikalisch hat allein das Verhältnis der g_{ik} eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Der Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} \, dx_i \, dx_k = 0$$

genügen nämlich bei gegebenem Anfangspunkt P diejenigen unendlich benachbarten Weltpunkte P', in denen ein in P aufgegebenes Lichtsignal eintrifft. Zum Zwecke der analytischen Darstellung haben wir 1. ein bestimmtes Koordinatensystem zu wählen und 2. in jedem Punkte P den willkürlichen Proportionalitätsfaktor, mit welchem die g_{ik} behaftet sind, festzulegen. Die auftretenden Formeln müssen dementsprechend eine doppelte Invarianzeigenschaft besitzen: 1. sie müssen *invariant* sein *gegenüber beliebigen stetigen Koordinatentransformationen*, 2. sie müssen ungeändert bleiben, *wenn man die* g_{ik} *durch* λg_{ik} *ersetzt*, wo λ eine willkürliche stetige Ortsfunktion ist. Das Hinzutreten dieser zweiten Invarianzeigenschaft ist für unsere Theorie charakteristisch.

Sind P, P^* irgend zwei Punkte und ist jedem Vektor $\mathfrak{x}$ in P ein Vektor $\mathfrak{x}^*$ in P^* in solcher Weise zugeordnet, dass dabei allgemein $\alpha\mathfrak{x}$ in $\alpha\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{x}^*+\mathfrak{y}^*$ übergeht (α eine beliebige Zahl) und der Vektor 0 in P der einzige ist, welchem der Vektor 0 in P^* entspricht, so ist dadurch eine *affine oder lineare Abbildung* des Vektorraumes in P auf den Vektorraum in P^* bewerkstelligt. Diese Abbildung ist insbesondere *ähnlich*, wenn das skalare Produkt der Bildvektoren $\mathfrak{x}^* \cdot \mathfrak{y}^*$ in P^* dem von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in P für alle Vektorpaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ proportional ist. (Nur dieser Begriff der *ähnlichen* Abbildung hat nach unserer Auffassung einen objektiven Sinn; die bisherige Theorie ermöglichte es, den schärferen der *kongruenten* Abbildung aufzustellen.) Was unter *Parallelverschiebung eines Vektors* im Punkte P nach einem Nachbarpunkte P' zu verstehen ist, wird durch die beiden axiomatischen Forderungen festgelegt:

1. Durch Parallelverschiebung der Vektoren im Punkte P nach dem Nachbarpunkte P' wird eine ähnliche Abbildung des Vektorraumes in P auf den Vektorraum in P' vollzogen;

2. sind P_1, P_2 zwei Nachbarpunkte zu P und geht der infinitesimale Vektor $\overrightarrow{PP_2}$ in P durch Parallelverschiebung nach dem Punkte P_1 in $\overrightarrow{P_1P_{12}}$ über, $\overrightarrow{PP_1}$ aber durch Parallelverschiebung nach P_2 in $\overrightarrow{P_2P_{21}}$, so fallen P_{12}, P_{21} zusammen (Kommutativität).

Derjenige Teil der 1. Forderung, welcher besagt, dass die Parallelverschiebung eine affine Verpflanzung des Vektorraumes von P nach P' ist, drückt sich analytisch folgendermassen aus: der Vektor ξ^i in $P = (x_1\, x_2 \ldots x_n)$ geht durch Verschiebung in einen Vektor

$$\xi^i + d\xi^i \quad \text{in} \quad P' = (x_1 + dx_1,\, x_2 + dx_2,\, \ldots,\, x_n + dx_n)$$

über, dessen Komponenten linear von ξ^i abhängen:

$$d\xi^i = -\sum_r d\gamma^i_r \xi^r. \tag{4}$$

Die 2. Forderung lehrt, dass die $d\gamma^i_r$ lineare Differentialformen sind:

$$d\gamma^i_r = \sum_s \Gamma^i_{rs}\, dx_s,$$

deren Koeffizienten die Symmetrieeigenschaft besitzen

$$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs}. \tag{5}$$

Gehen zwei Vektoren ξ^i, η^i in P durch die Parallelverschiebung nach P' in $\xi^i + d\xi^i$, $\eta^i + d\eta^i$ über, so besagt die unter 1. gestellte, über die Affinität hinausgehende Forderung der Ähnlichkeit, dass

$$\sum_{ik} (g_{ik} + dg_{ik})\, (\xi^i + d\xi^i)\, (\eta^k + d\eta^k) \quad \text{zu} \quad \sum_{ik} g_{ik}\, \xi^i \eta^k$$

proportional sein muss. Nennen wir den unendlich wenig von 1 abweichenden Proportionalitätsfaktor $1+d\varphi$ und definieren das Herunterziehen eines Index in üblicher Weise durch die Formel

$$a_i = \sum_k g_{ik}\, a^k,$$

so ergibt sich

$$dg_{ik} - (d\gamma_{ki} + d\gamma_{ik}) = g_{ik}\, d\varphi. \tag{6}$$

Daraus geht hervor, dass $d\varphi$ eine lineare Differentialform ist:

$$d\varphi = \sum_i \varphi_i\, dx_i. \tag{7}$$

Ist sie bekannt, so liefert die Gleichung (6) oder

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} - g_{ik}\, \varphi_r$$

zusammen mit der Symmetriebedingung (5) eindeutig die Grössen Γ. *Der innere Masszusammenhang des Raumes hängt also ausser von der* (nur bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor bestimmten) *quadratischen Form* (2) *noch von einer Linearform* (7) *ab.* Ersetzen wir, ohne das Koordinatensystem zu ändern, g_{ik} durch $\lambda\, g_{ik}$, so ändern sich die Grössen $d\gamma^i_k$ nicht, $d\gamma_{ik}$ nimmt den Faktor λ an, dg_{ik} geht über in $\lambda\, dg_{ik} + g_{ik}\, d\lambda$. Die Gleichung (6) lehrt dann, dass $d\varphi$ übergeht in

$$d\varphi + \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi + d \lg \lambda.$$

In der Linearform $\Sigma\, \varphi_i\, dx_i$ bleibt also nicht etwa ein Proportionalitätsfaktor unbestimmt, der durch willkürliche Wahl einer Masseinheit festgelegt werden müsste, die ihr anhaftende Willkür besteht vielmehr in einem *additiven totalen Differential.* Für die analytische Darstellung der Geometrie sind die Formen

$$g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad \varphi_i\, dx_i \tag{8}$$

gleichberechtigt mit

$$\lambda \cdot g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad \text{und} \quad \varphi_i\, dx_i + d \lg \lambda, \tag{9}$$

wo λ eine beliebige positive Ortsfunktion ist. *Invariante Bedeutung hat demnach der schiefsymmetrische Tensor mit den Komponenten*

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{10}$$

d.i. die Form

$$F_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \frac{1}{2} F_{ik}\, \Delta x_{ik},$$

welche von zwei willkürlichen Verschiebungen dx und δx im Punkte P bilinear – oder besser, von dem durch diese beiden Verschiebungen aufgespannten Flächenelement mit den Komponenten

$$\Delta x_{ik} = dx_i \, \delta x_k - dx_k \, \delta x_i$$

linear abhängt. Der Sonderfall der bisherigen Theorie, in welchem sich die in einem Anfangspunkt willkürlich gewählte Längeneinheit durch Parallelverschiebung in einer vom Wege unabhängigen Weise nach allen Raumpunkten übertragen lässt, liegt vor, wenn die g_{ik} sich in solcher Weise absolut festlegen lassen, dass die φ_i verschwinden. Die Γ^i_{rs} sind dann nichts anderes als die CHRISTOFFELschen Drei-Indizes-Symbole. Die notwendige und hinreichende invariante Bedingung dafür, dass dieser Fall vorliegt, besteht in dem identischen Verschwinden des Tensors F_{ik}.

Es ist danach sehr naheliegend, in der Weltgeometrie φ_i als *Viererpotential*, den Tensor F mithin als *elektromagnetisches Feld* zu deuten. Denn das Nichtvorhandensein eines elektromagnetischen Feldes ist die notwendige Bedingung dafür, dass die bisherige EINSTEINsche Theorie, aus welcher sich nur die Gravitationserscheinungen ergeben, Gültigkeit besitzt. Akzeptiert man diese Auffassung, so sieht man, dass die elektrischen Grössen von solcher Natur sind, dass ihre Charakterisierung durch Zahlen in einem bestimmten Koordinatensystem nicht von der willkürlichen Wahl einer Masseinheit abhängt. Zur Frage der Masseinheit und Dimension muss man sich überhaupt in dieser Theorie neu orientieren. Bisher sprach man eine Grösse z. B. als einen Tensor der 2. Stufe (vom Range 2) an, wenn ein einzelner Wert derselben *nach Wahl einer willkürlichen Masseinheit* in jedem Koordinatensystem eine Matrix von Zahlen a_{ik} bestimmt, welche die Koeffizienten einer invarianten Bilinearform zweier willkürlicher infinitesimaler Verschiebungen

$$a_{ik} \, dx_i \, \delta x_k \tag{11}$$

bilden. Hier sprechen wir von einem Tensor, wenn bei Zugrundelegung eines Koordinatensystems und *nach bestimmter Wahl des in den g_{ik} enthaltenen Proportionalitätsfaktors* die Komponenten a_{ik} eindeutig bestimmt sind, und zwar so, dass bei Koordinatentransformation die Form (11) invariant bleibt, bei Ersetzung von g_{ik} durch $\lambda \, g_{ik}$ aber die a_{ik} übergehen in $\lambda^e a_{ik}$. Wir sagen dann, der Tensor habe das *Gewicht e*, oder auch, indem wir dem Linienelement ds die Dimension «*Länge* $= l$» zuschreiben, er sei von der Dimension l^{2e}. Absolut invariante Tensoren sind nur die vom Gewichte 0. Von dieser Art ist der Feldtensor mit den Komponenten F_{ik}. Er genügt nach (10) dem ersten System der MAXWELLschen Gleichungen.

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0 .$$

Liegt einmal der Begriff der Parallelverschiebung fest, so lässt sich die Geometrie und Tensorrechnung mühelos begründen. *a*) *Geodätische Linie.* Ist ein

Punkt P und in ihm ein Vektor gegeben, so entsteht die von P in Richtung dieses Vektors ausgehende geodätische Linie dadurch, dass man den Vektor beständig parallel mit sich in seiner eigenen Richtung verschiebt. Die Differentialgleichung der geodätischen Linie lautet bei Benutzung eines geeigneten Parameters τ:

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx_r}{d\tau} \frac{dx_s}{d\tau} = 0.$$

(Sie lässt sich hier natürlich nicht als Linie kürzester Länge charakterisieren, da der Begriff der Kurvenlänge ohne Sinn ist.) *b) Tensorkalkül.* Um z.B. aus einem kovarianten Tensorfeld 1. Stufe vom Gewichte 0 mit den Komponenten f_i durch Differentiation ein Tensorfeld 2. Stufe herzuleiten, nehmen wir einen willkürlichen Vektor ξ^i im Punkte P zu Hilfe, bilden die Invariante $f_i \xi^i$ und ihre unendlich kleine Änderung beim Übergang vom Punkte P mit den Koordinaten x_i zum Nachbarpunkte P' mit den Koordinaten $x_i + dx_i$, indem wir bei diesem Übergang den Vektor ξ parallel mit sich verschieben. Es kommt für diese Änderung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi^i dx_k + f_r d\xi^r = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \Gamma^r_{ik} f_r\right) \xi^i dx_k.$$

Die auf der rechten Seite eingeklammerten Grössen sind also die Komponenten eines Tensorfeldes 2. Stufe vom Gewichte 0, das in völlig invarianter Weise aus dem Felde f gebildet ist. *c) Krümmung.* Um das Analogon des Riemannschen Krümmungstensors zu konstruieren, knüpfe man an die oben benutzte unendlich kleine Parallelogrammfigur an, bestehend aus den Punkten P, P_1, P_2 und $P_{12} = P_{21}$. Verschiebt man einen Vektor $\mathfrak{x} = (\xi^i)$ in P parallel mit sich nach P_1 und von da nach P_{12}, ein andermal zunächst nach P_2 und von da nach P_{21}, so hat es einen Sinn, da P_{12} und P_{21} zusammenfallen, die Differenz $\Delta \mathfrak{x}$ der beiden in diesem Punkte erhaltenen Vektoren zu bilden. Für ihre Komponenten ergibt sich

$$\Delta\xi^i = R^i_j \xi^j, \tag{12}$$

wo die R^i_j unabhängig sind von dem verschobenen Vektor $\mathfrak{x}$, hingegen linear abhängen von dem Flächenelement, das durch die beiden Verschiebungen $\overrightarrow{PP}_1 = (dx_i)$, $\overrightarrow{PP}_2 = (\delta x_i)$ aufgespannt wird:

$$R^i_j = R^i_{jkl}\, dx_k\, \delta x_l = \frac{1}{2} R^i_{jkl}\, \Delta x_{kl}.$$

Die nur von der Stelle P abhängigen Krümmungskomponenten R^i_{jkl} haben die beiden Symmetrieeigenschaften: 1. sie ändern ihr Vorzeichen durch Vertauschung der beiden letzten Indizes k und l; 2. nimmt man mit $j\,k\,l$ die drei zyklischen Vertauschungen vor und addiert die zugehörigen Komponenten, so ergibt sich 0. Ziehen wir den Index i herunter, so erhalten wir in R_{ijkl} die Komponenten eines kovarianten Tensors 4. Stufe vom Gewichte 1. Noch ohne

Ausrechnung ergibt sich durch eine einfache Überlegung, dass R auf natürliche invariante Weise in zwei Summanden spaltet:

$$R^i_{jkl} = P^i_{jkl} - \frac{1}{2}\delta^i_j F_{kl} \quad \delta^i_j = \begin{cases} 1 \; (i = j) \\ 0 \; (i \neq j) \end{cases}, \tag{13}$$

von denen der erste P_{ijkl} nicht nur in den Indizes $k\,l$, sondern auch in i und j schiefsymmetrisch ist. Während die Gleichungen $F_{ik} = 0$ unsern Raum als einen solchen ohne elektromagnetisches Feld charakterisieren, d.h. als einen solchen, in welchem das Problem der Längenübertragung integrabel ist, sind $P^i_{jkl} = 0$, wie aus (13) hervorgeht, die invarianten Bedingungen dafür, dass in ihm kein Gravitationsfeld herrscht, d.h. dass das Problem der Richtungsübertragung integrabel ist. Nur der Euklidische Raum ist ein zugleich elektrizitäts- und gravitationsleerer.

Die einfachste Invariante einer linearen Abbildung wie (12), die jedem Vektor $\mathfrak{x}$ einen Vektor $\Delta\mathfrak{x}$ zuordnet, ist ihre «Spur»

$$\frac{1}{n} R^i_i.$$

Für diese ergibt sich hier nach (13) die Form

$$-\frac{1}{2} F_{ik}\, dx_i\, \delta x_k,$$

welche uns schon oben begegnete. Die einfachste Invariante eines Tensors wie $-F_{ik}/2$ ist das Quadrat seines Betrages:

$$L = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}.$$

L ist offenbar, da der Tensor F das Gewicht 0 besitzt, eine Invariante vom Gewichte -2. Ist g die negative Determinante der g_{ik},

$$d\omega = \sqrt{g}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sqrt{g}\, dx$$

das Volumen eines unendlich kleinen Volumelementes, so wird bekanntlich die MAXWELLsche Theorie beherrscht von der elektrischen Wirkungsgrösse, welche gleich dem über ein beliebiges Weltgebiet erstreckten Integral $\int L\, d\omega$ dieser einfachsten Invariante ist, und zwar in dem Sinne, dass bei beliebiger Variation der g_{ik} und φ_i, die an den Grenzen des Weltgebiets verschwindet,

$$\delta \int L\, d\omega = \int (S^i\, \delta\varphi_i + T^{ik}\, \delta g_{ik})\, d\omega$$

gilt, wo

$$S^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{ik})}{\partial x_k}$$

die linken Seiten der inhomogenen MAXWELLschen Gleichungen sind (auf deren rechter Seite die Komponenten des Viererstroms stehen), und die T^{ik} den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes bilden. Da L eine Invariante vom Gewichte -2 ist, das Volumelement aber in der n-dimensionalen Geometrie eine solche vom Gewichte $n/2$, so hat das Integral $\int L\, d\omega$ nur einen Sinn, wenn die Dimensionszahl $n = 4$ ist. *Die Möglichkeit der* MAXWELL*schen Theorie ist also in unserer Deutung an die Dimensionszahl 4 gebunden.* In der vierdimensionalen Welt aber wird die elektromagnetische Wirkungsgrösse eine reine Zahl. Als wie gross sich dabei die Wirkungsgrösse 1 in den traditionellen Masseinheiten des CGS-Systems herausstellt, kann freilich erst ermittelt werden, wenn auf Grund unserer Theorie ein an der Beobachtung zu prüfendes physikalisches Problem, z. B. das Elektron, berechnet vorliegt.

Von der Geometrie zur Physik übergehend, haben wir nach dem Vorbild der MIEschen Theorie[1]) anzunehmen, dass die gesamte Gesetzmässigkeit der Natur auf einer bestimmten Integralinvariante, der *Wirkungsgrösse*

$$\int W\, d\omega = \int \mathfrak{W}\, dx \quad (\mathfrak{W} = W\sqrt{g}),$$

beruht, derart, dass *die wirkliche Welt unter allen möglichen vierdimensionalen metrischen Räumen dadurch ausgezeichnet ist, dass für sie die in jedem Weltgebiet enthaltene Wirkungsgrösse einen extremalen Wert annimmt* gegenüber solchen Variationen der Potentiale g_{ik}, φ_i, welche an den Grenzen des betreffenden Weltgebiets verschwinden. W, die Weltdichte der Wirkung, muss eine Invariante vom Gewichte -2 sein. *Die Wirkungsgrösse ist auf jeden Fall eine reine Zahl*; so gibt unsere Theorie von vornherein Rechenschaft über diejenige atomistische Struktur der Welt, der nach heutiger Auffassung die fundamentalste Bedeutung zukommt: das Wirkungsquantum. Der einfachste und natürlichste Ansatz, den wir für W machen können, lautet

$$W = R^i_{jkl}\, R_i^{jkl} = |R|^2. \tag{14}$$

Nach (13) ergibt sich dafür auch

$$W = |P|^2 + 4L.$$

(Höchstens der Faktor 4, mit welchem der zweite [elektrische] Term L zu dem ersten hinzutritt, könnte hier noch zweifelhaft sein.) Aber ohne noch die Wirkungsgrösse zu spezialisieren, können wir aus dem Wirkungsprinzip einige allgemeine Schlüsse ziehen. Wir werden nämlich zeigen: *in der gleichen Weise,* wie nach Untersuchungen von HILBERT, LORENTZ, EINSTEIN, KLEIN und dem Verfasser[2]) *die vier Erhaltungssätze der Materie* (des Energie-Impuls-Tensors) *mit der,* vier willkürliche Funktionen enthaltenden *Invarianz der Wirkungsgrösse gegen Koordinatentransformationen zusammenhängen, ist mit der hier neu*

---

[1]) G. MIE, Ann. Physik *37, 39, 40* (1912/13). Vgl. auch H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie* (Berlin 1918), § 25.

[2]) D. HILBERT, *Die Grundlagen der Physik*, 1. Mitt., Gött. Nachr., 20. Nov. 1915; H. A. LORENTZ in vier Abhandlungen in den Versl. Kgl. Akad. van Wetensch., Amsterdam 1915/16; A. EINSTEIN, Berl. Ber. *1916*, S. 1111–1116; F. KLEIN, Gött. Nachr., 25. Januar 1918; H. WEYL, Ann. Physik *54*, S. 121–125 (1917).

hinzutretenden, eine fünfte willkürliche Funktion hereinbringenden «*Maßstab-Invarianz*» [Übergang von (8) zu (9)] *das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität verbunden*. Die Art und Weise, wie sich so das letztere dem Energie-Impuls-Prinzip gesellt, erscheint mir als eines der stärksten allgemeinen Argumente zugunsten der hier vorgetragenen Theorie – soweit im rein Spekulativen überhaupt von einer Bestätigung die Rede sein kann.

Wir setzen für eine beliebige, an den Grenzen des betrachteten Weltgebiets verschwindende Variation

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = \int (\mathfrak{W}^{ik}\, \delta g_{ik} + \mathfrak{w}^i\, \delta\varphi_i)\, dx \quad (\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik}). \tag{15}$$

Die Naturgesetze lauten dann

$$\mathfrak{W}^{ik} = 0, \quad \mathfrak{w}^i = 0. \tag{16}$$

Die ersten können wir als die Gesetze des Gravitationsfeldes, die zweiten als die des elektromagnetischen Feldes ansprechen. Die durch

$$\mathfrak{W}^i_k = \sqrt{g}\, W^i_k, \quad \mathfrak{w}^i = \sqrt{g}\, w^i$$

eingeführten Grössen W^i_k, w^i sind die gemischten bzw. kontravarianten Komponenten eines Tensors 2. bzw. 1. Stufe vom Gewichte -2. In dem System der Gleichungen (16) sind gemäss den Invarianzeigenschaften 5 überschüssige enthalten. Das spricht sich aus in den folgenden 5 invarianten Identitäten, die zwischen ihren linken Seiten bestehen:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} \equiv \mathfrak{W}^i_i; \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}^i_k}{\partial x_i} - \Gamma^s_{kr}\, \mathfrak{W}^r_s \equiv \frac{1}{2} F_{ik}\, \mathfrak{w}^i. \tag{18}$$

Die erste resultiert aus der Maßstab-Invarianz. Nehmen wir nämlich in dem Übergang von (8) zu (9) für $\lg \lambda$ eine unendliche kleine Ortsfunktion $\delta\varrho$ an, so erhalten wir die Variation

$$\delta g_{ki} = g_{ik}\, \delta\varrho, \quad \delta\varphi_i = \frac{\partial(\delta\varrho)}{\partial x_i}.$$

Für sie muss (15) verschwinden. Indem man zweitens die Invarianz der Wirkungsgrösse gegenüber Koordinatentransformationen durch eine unendlich kleine Deformation des Weltkontinuums ausnutzt[1]), gewinnt man die Identitäten

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{W}^i_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k}\mathfrak{W}^{rs}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}\cdot \varphi_k - F_{ik}\,\mathfrak{w}^i\right) \equiv 0,$$

die sich in (18) verwandeln, wenn nach (17) $\partial\mathfrak{w}^i/\partial x_i$ durch $g_{rs}\,\mathfrak{W}^{rs}$ ersetzt wird. Aus den Gravitationsgesetzen allein ergibt sich also bereits, dass

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0 \tag{19}$$

[1]) H. Weyl, Ann. Physik *54*, S. 121–125 (1917); F. Klein, Gött. Nachr., Sitzung vom 25. Januar 1918.

ist, aus den elektromagnetischen Feldgesetzen allein, dass

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \Gamma^s_{k\,r}\, \mathfrak{W}^r_s = 0 \tag{20}$$

sein muss. In der MAXWELLschen Theorie hat $\mathfrak{w}^i$ die Form

$$\mathfrak{w}^i \equiv \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{ik})}{\partial x_k} - \mathfrak{s}^i \quad (\mathfrak{s}^i = \sqrt{g}\, s^i)\,,$$

wo s^i den Viererstrom bedeutet. Da hier der erste Teil identisch der Gleichung (19) genügt, liefert diese das Erhaltungsgesetz der Elektrizität:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, s^i)}{\partial x_i} = 0\,.$$

Ebenso besteht in der EINSTEINschen Gravitationstheorie $\mathfrak{W}_k^i$ aus zwei Termen, von denen der erste der Gleichung (20) identisch genügt, der zweite gleich den mit $\sqrt{g}$ multiplizierten gemischten Komponenten T_k^i des Energie-Impuls-Tensors ist. So führen die Gleichungen (20) zu den vier Erhaltungssätzen der Materie. Ganz analoge Umstände treffen in unserer Theorie zu, wenn wir für die Wirkungsgrösse den Ansatz (14) wählen. Die fünf Erhaltungsprinzipe sind «Eliminanten» der Feldgesetze, d.h. folgen auf doppelte Weise aus ihnen und setzen dadurch in Evidenz, dass unter ihnen fünf überschüssige enthalten sind.

Für den Ansatz (14) lauten die MAXWELLschen Gleichungen beispielsweise

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{ik})}{\partial x_k} &= s^i, \quad \text{und der Strom} \\ s_i \ \text{ist} &= \frac{1}{4}\left(R\, \varphi_i + \frac{\partial R}{\partial x_i}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

R bezeichnet diejenige Invariante vom Gewichte -1, die aus R^i_{jkl} entsteht, wenn man zunächst nach i, k, darauf nach j und l verjüngt. Die Rechnung ergibt, wenn R^* die nur aus den g^{ik} aufgebaute Riemannsche Krümmungsinvariante bedeutet:

$$R = R^* - \frac{3}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, \varphi^i)}{\partial x_i} + \frac{3}{2}\,(\varphi_i\, \varphi^i)\,.$$

Im statischen Falle, wo die Raumkomponenten des elektromagnetischen Potentials verschwinden und alle Grössen unabhängig von der Zeit x_0 sind, muss nach (21)

$$R = R^* + \frac{3}{2}\, \varphi_0\, \varphi^0 = \text{const}$$

sein. Aber man kann auch ganz allgemein in einem Weltgebiet, in welchem $R \neq 0$ ist, durch geeignete Festlegung der willkürlichen Längeneinheit $R = \text{const} = \pm 1$ erzielen. Nur hat man bei zeitlich veränderlichen Zuständen Flächen $R = 0$ zu erwarten, die offenbar eine gewisse singuläre Rolle spielen werden. Als Wirkungsdichte (R^* tritt als solche in der EINSTEINschen Gravitationstheorie auf) ist R nicht zu gebrauchen, da sie nicht das Gewicht -2 besitzt. Dies hat zur Folge, dass unsere Theorie wohl auf die MAXWELLschen elektromagnetischen, nicht aber auf die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen führt; an ihre Stelle treten Differentialgleichungen 4. Ordnung. In der Tat ist es aber auch sehr unwahrscheinlich, dass die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen streng richtig sind, vor allem deshalb, weil die in ihnen vorkommende Gravitationskonstante ganz aus dem Rahmen der übrigen Naturkonstanten herausfällt, so dass der Gravitationsradius der Ladung und Masse eines Elektrons z.B. von völlig anderer Grössenordnung (nämlich 10^{20} bzw. 10^{40}mal so klein) ist wie der Radius des Elektrons selber[1]).

Es war hier nur meine Absicht, die allgemeinen Grundlagen der Theorie kurz zu entwickeln. Es entsteht natürlich die Aufgabe, unter Zugrundelegung des speziellen Ansatzes (14) ihre physikalischen Konsequenzen zu ziehen und diese mit der Erfahrung zu vergleichen, insbesondere zu untersuchen, ob sich aus ihr die Existenz des Elektrons und die Besonderheiten der bisher unaufgeklärten Vorgänge im Atom herleiten lassen. Die Aufgabe ist in mathematischer Hinsicht ausserordentlich kompliziert, da es ausgeschlossen ist, durch Beschränkung auf die linearen Glieder Näherungslösungen zu erhalten; denn da die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung im Innern des Elektrons gewiss nicht statthaft ist, so dürfen die durch eine derartige Vernachlässigung entstehenden linearen Gleichungen im wesentlichen nur die Lösung 0 besitzen. Ich behalte mir vor, an anderm Ort ausführlicher auf alle diese Dinge zurückzukommen.

Nachtrag. Herr A. EINSTEIN bemerkt zu der vorliegenden Arbeit:

«Wenn Lichtstrahlen das einzige Mittel wären, um die metrischen Verhältnisse in der Umgebung eines Weltpunktes empirisch zu ermitteln, so bliebe in dem Abstand ds (sowie in den g_{ik}) allerdings ein Faktor unbestimmt. Diese Unbestimmtheit ist aber nicht vorhanden, wenn man zur Definition von ds Messergebnisse heranzieht, die mit (unendlich kleinen) starren Körpern (Massstäben) und Uhren zu gewinnen sind. Ein zeitartiges ds kann dann unmittelbar gemessen werden durch eine Einheitsuhr, deren Weltlinie ds enthält.

Eine derartige Definition des elementaren Abstandes ds würde nur dann illusorisch werden, wenn die Begriffe ‚Einheitsmaßstab' und ‚Einheitsuhr' auf einer prinzipiell falschen Voraussetzung beruhten; dies wäre dann der Fall, wenn die Länge eines Einheitsmaßstabes (bzw. die Ganggeschwindigkeit einer Einheitsuhr) von der Vorgeschichte abhingen. Wäre dies in der Natur wirklich so, dann könnte es nicht chemische Elemente mit Spektrallinien von bestimmter Frequenz geben, sondern es müsste die relative Frequenz zweier (räumlich benachbarter) Atome der gleichen Art im allgemeinen verschieden sein. Da dies nicht der Fall ist, scheint mir die Grundhypothese der Theorie leider nicht annehmbar, deren Tiefe und Kühnheit aber jeden Leser mit Bewunderung erfüllen muss.»

[1]) Vgl. H. WEYL, *Zur Gravitationstheorie*, Ann. Physik *54*, S. 133 (1917).

Erwiderung des Verfassers. Ich danke Herrn EINSTEIN dafür, dass er mir Gelegenheit gibt, sogleich dem von ihm erhobenen Einwand zu begegnen. In der Tat glaube ich nicht, dass er berechtigt ist. Nach der speziellen Relativitätstheorie hat ein starrer Maßstab immer wieder die gleiche Ruhlänge, wenn er in einem tauglichen Bezugsraum zur Ruhe gekommen ist, und eine richtiggehende Uhr besitzt unter diesen Umständen immer wieder, in Eigenzeit gemessen, dieselbe Periode (MICHELSON-Versuch, DOPPLER-Effekt). Es ist aber gar nicht die Rede davon, dass bei beliebig stürmischer Bewegung eine Uhr die Eigenzeit, $\int ds$, misst (so wenig wie etwa in der Thermodynamik ein beliebig rasch und ungleichmässig erhitztes Gas lauter Gleichgewichtszustände durchläuft); das ist erst recht nicht der Fall, wenn die Uhr (das Atom) der Einwirkung eines starken veränderlichen elektromagnetischen Feldes ausgesetzt ist. In der allgemeinen Relativitätstheorie kann man also höchstens soviel behaupten: Eine in einem *statischen* Gravitationsfeld *ruhende Uhr* misst *bei Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes* das Integral $\int ds$. Wie sich eine Uhr bei beliebiger Bewegung unter der gemeinsamen Einwirkung eines beliebigen elektromagnetischen und Gravitationsfeldes verhält, kann erst die Durchführung einer auf den physikalischen Gesetzen beruhenden Dynamik lehren. Wegen dieses problematischen Verhaltens der Maßstäbe und Uhren habe ich mich in meinem Buch *Raum, Zeit, Materie* zur prinzipiellen Messung der g_{ik} allein auf die Beobachtung der Ankunft von Lichtsignalen gestützt (S. 182ff.); dadurch können diese Grössen in der Tat, *falls die EINSTEINsche Theorie gültig ist,* nicht nur ihrem Verhältnis nach, sondern (nach Wahl einer festen Masseinheit) absolut bestimmt werden. Auf den gleichen Gedanken ist, unabhängig von mir, KRETSCHMANN gekommen[1]).

Nach der hier entwickelten Theorie lautet, ausser im Innersten der Atome, bei geeigneter Wahl der Koordinaten und des unbestimmten Proportionalitätsfaktors, die quadratische Form ds^2 mit grosser Annäherung so wie in der speziellen Relativitätstheorie und ist die lineare Form mit der gleichen Annäherung $= 0$. Im Falle der Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes (Linearform streng $= 0$) ist durch die in der Klammer ausgesprochene Forderung ds^2 sogar völlig exakt bestimmt (bis auf einen *konstanten* Proportionalitätsfaktor, der ja auch nach EINSTEIN willkürlich bleibt; das gleiche tritt noch ein, wenn nur ein elektrostatisches Feld vorhanden ist). Die plausibelste Annahme, die man über eine im statischen Feld ruhende Uhr machen kann, ist die, dass sie das Integral des *so normierten ds* misst; es bleibt in meiner wie in der EINSTEINschen Theorie die Aufgabe, diese Tatsache[2]) aus einer explizite durchgeführten Dynamik abzuleiten. Auf jeden Fall aber wird sich ein schwingendes Gebilde von bestimmter Konstitution, das dauernd in einem bestimmten statischen Felde ruht, auf eine eindeutig bestimmte Weise verhalten (der Einfluss einer etwaigen stürmischen Vorgeschichte wird rasch abklingen); ich

[1]) E. KRETSCHMANN, *Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate,* Ann. Phys. *53,* S. 575 (1917).

[2]) Deren experimentelle Prüfung zum Teil noch aussteht (Rotverschiebung der Spektrallinien in der Nähe grosser Massen).

glaube nicht, dass mit dieser (durch die Existenz chemischer Elemente für die Atome bestätigten) Erfahrung meine Theorie irgendwie in Widerspruch gerät. Es ist zu beachten, dass der mathematisch-ideale Prozess der Vektor-Verschiebung, welcher dem mathematischen Aufbau der Geometrie zugrunde zu legen ist, nichts zu schaffen hat mit dem realen Vorgang der Bewegung einer Uhr, dessen Verlauf durch die Naturgesetze bestimmt wird.

Die hier entwickelte Geometrie ist, das muss vom mathematischen Standpunkt aus betont werden, die wahre Nahegeometrie. Es wäre merkwürdig, wenn in der Natur statt dieser wahren eine halbe und inkonsequente Nahegeometrie mit einem angeklebten elektromagnetischen Felde realisiert wäre. Aber natürlich kann ich mit meiner ganzen Auffassung auf dem Holzwege sein; es handelt sich hier wirklich um reine Spekulation; der Vergleich mit der Erfahrung ist selbstverständliches Erfordernis. Dazu müssen aber die Konsequenzen der Theorie gezogen werden; bei dieser schwierigen Aufgabe hoffe ich auf Mithilfe.

Nachtrag Juni 1955

Diese Arbeit steht am Anfang der Versuche, eine «einheitliche Feldtheorie» aufzubauen, die später von vielen anderen – wie mir scheint, bisher ohne durchschlagenden Erfolg – fortgesetzt wurden; das Problem hat insbesondere EINSTEIN selbst, wie bekannt, bis zu seinem Ende unablässig beschäftigt.

Den Ausbau meiner Theorie vollzog ich in zwei Arbeiten (34), (46), ferner in der 4. und vor allem 5. Auflage meines Buches «Raum, Zeit, Materie». Dabei gab ich – zunächst aus formalen Gründen, dann aber bestärkt durch eine Untersuchung von W. PAULI (Verh. dtsch. phys. Ges. *21*, 1919) – einem andern Wirkungsprinzip den Vorzug.

Das stärkste Argument für meine Theorie schien dies zu sein, dass die Eichinvarianz dem Prinzip von der Erhaltung der elektrischen Ladung so entspricht wie die Koordinaten-Invarianz dem Erhaltungssatz von Energie-Impuls. Später führte die Quantentheorie die SCHRÖDINGER-DIRACschen Potentiale ψ des Elektron-Positron-Feldes ein; in ihr trat ein aus der Erfahrung gewonnenes und die Erhaltung der Ladung garantierendes Prinzip der Eichinvarianz auf, das die ψ mit den elektromagnetischen Potentialen φ_i in ähnlicher Weise verknüpft wie meine spekulative Theorie die Gravitationspotentiale g_{ik} mit den φ_i, wobei zudem die φ_i in einer bekannten atomaren statt in einer unbekannten kosmologischen Einheit gemessen werden. Es scheint mir kein Zweifel, dass das Prinzip der Eichinvarianz hier seine richtige Stelle hat, und nicht, wie ich 1918 geglaubt hatte, im Zusammenspiel von Gravitation und Elektrizität. Man vergleiche darüber meinen Aufsatz (93): *Geometrie und Physik.*